6 Taylor の定理

Exercise 解答例

基本演習 3 $f(x) = \sqrt{1+x}$ に対して 5 次の項までを近似値とし 6 次の項を誤差とする Taylor の定理を適用し、 $\sqrt{3}$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。また、この近似によって $\sqrt{3}$ の値が小数点以下何桁まで確定するかも調べて下さい。

【解答例】 5 次の近似を行う場合、誤差項には 6 階微分が現れるので 6 階までの微分を計算しておきましょう。

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1} \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-2} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-3} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \left(\frac{1}{2} - 3 \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-4} \\ f^{(5)}(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \left(\frac{1}{2} - 3 \right) \left(\frac{1}{2} - 4 \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-5} \\ f^{(6)}(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \left(\frac{1}{2} - 3 \right) \left(\frac{1}{2} - 4 \right) \left(\frac{1}{2} - 5 \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-6} \end{aligned}$$

すると $x = 0$ での Taylor の定理から、

$$\begin{aligned} f(2) &= f(0) + f'(0)2 + \frac{f''(0)}{2!}2^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}2^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}2^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}2^5 + \frac{f^{(6)}(c)}{6!}2^6 \\ \sqrt{3} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2^2} \cdot 2^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2^3} \cdot 2^3 + \frac{1}{24} \cdot \frac{-3 \cdot 5}{2^4} \cdot 2^4 \\ &\quad + \frac{1}{120} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5} \cdot 2^5 + \frac{1}{720} \cdot \frac{-3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^6} (1+c)^{\frac{1}{2}-6} \cdot 2^6 \end{aligned}$$

となる様な c が 0 と 2 の間に存在します。この右辺の最初の 6 項目までの和を近似値、最後の項を誤差と考えると、

$$(\text{近似値}) = 1 + 1 + \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{8} + \frac{7}{8} = 2.25$$

であり、また誤差の絶対値は

$$|(\text{誤差})| = \left| \frac{63}{48} (1+c)^{\frac{1}{2}-6} \right| = \frac{63}{48} \frac{1}{(1+c)^{6-\frac{1}{2}}} \leq \frac{63}{48} = 1.3125$$

と評価されます。これでは誤差が大き過ぎますね。 $\sqrt{3}$ の値はどの桁も全く決定しません。

一方、 $x = 3$ での Taylor の定理を適用すれば

$$\begin{aligned} f(2) &= f(3) + f'(3)(2-3) + \frac{f''(3)}{2!}(2-3)^2 + \frac{f^{(3)}(3)}{3!}(2-3)^3 \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(3)}{4!}(2-3)^4 + \frac{f^{(5)}(3)}{5!}(2-3)^5 + \frac{f^{(6)}(c)}{6!}(2-3)^6 \\ \sqrt{3} &= 2 + \frac{1}{2^2}(-1) - \frac{1}{2^6}(-1)^2 + \frac{1}{2^9}(-1)^3 \\ &\quad - \frac{5}{2^{14}}(-1)^4 + \frac{7}{2^{17}}(-1)^5 - \frac{21}{2^{10}}(1+c)^{-\frac{11}{2}}(-1)^6 \end{aligned}$$

となる様な c が 2 と 3 の間に存在します。この右辺の最初の 6 項目までの和を近似値、最後の項を誤差と考えると、

$$(\text{近似値}) = 2 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^9} - \frac{5}{2^{14}} - \frac{7}{2^{17}} = \frac{227025}{131072} = 1.73206329\dots$$

であり、また誤差の絶対値は

$$\begin{aligned} |(\text{誤差})| &= \left| \frac{21}{2^{10}}(1+c)^{-\frac{11}{2}} \right| \\ &= \frac{21}{2^{10}} \frac{1}{(1+c)^{\frac{11}{2}}} \\ &\leq \frac{21}{1024 \sqrt{3^{11}}} \\ &\leq \frac{21}{1024 \cdot 3^5} \\ &\leq 0.0000844 \end{aligned}$$

と評価されます。これぐらいの誤差ならまあ良いんじゃないでしょうか。

この場合、

$$\begin{aligned} 1.73206329 - 0.0000844 &< \sqrt{3} < 1.73206330 + 0.0000844 \\ 1.731979 &< \sqrt{3} < 1.732148 \end{aligned}$$

ですから、小数点以下 2 桁までが確定している事になります。

□

基本演習 4 関数 $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ に対して 3 次の項までを近似値とし 4 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x=0$ の近くで適用し、 $\sqrt[3]{2}$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。また、この近似によって $\sqrt[3]{2}$ の値が小数点以下何桁まで確定するかも調べて下さい。

【解答例】 3 次の近似を行う場合、誤差項には 4 階微分が現れるので 4 階までの微分を計算しておきましょう。

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{3}} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{3}(1+x)^{\frac{1}{3}-1} & f'(0) &= \frac{1}{3} \\ f''(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) (1+x)^{\frac{1}{3}-2} & f''(0) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ f^{(3)}(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) (1+x)^{\frac{1}{3}-3} & f^{(3)}(0) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \\ f^{(4)}(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \left(\frac{1}{3} - 3 \right) (1+x)^{\frac{1}{3}-4} \end{aligned}$$

すると Taylor の定理から、

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} + \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \\ \sqrt[3]{2} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + \frac{1}{6 \cdot 3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{24 \cdot 3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \left(\frac{1}{3} - 3 \right) (1+c)^{\frac{1}{3}-4} \end{aligned}$$

となる様な c が 0 と 1 の間に存在します。この右辺の最初の 4 項目までの和を近似値、最後の項を誤差と考えると、

$$(\text{近似値}) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{-2}{2 \cdot 3^2} + \frac{2 \cdot 5}{6 \cdot 3^3} = \frac{3^4 + 3^3 - 3^2 + 5}{3^4} = \frac{104}{81} = 1.28395 \dots$$

であり、また誤差の絶対値は

$$\begin{aligned} |(\text{誤差})| &= \left| \frac{1}{24 \cdot 3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \left(\frac{1}{3} - 3 \right) (1+c)^{\frac{1}{3}-4} \right| \\ &= \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{24 \cdot 3^4} \frac{1}{(1+c)^{4-\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{10}{3^5} \\ &\leq 0.04116 \end{aligned}$$

と評価されます。

従って

$$\begin{aligned} 1.28395 - 0.04116 &< \sqrt[3]{2} < 1.28396 + 0.04116 \\ 1.24279 &< \sqrt[3]{2} < 1.32512 \end{aligned}$$

が分かりますから、正確な値は 1 の位だけが確定しています。ちなみに正確な数値は $\sqrt[3]{2} = 1.259921 \dots$ です。 □

基本演習 5 関数 $f(x) = \log(1+x)$ に対して 3 次の項までを近似値とし 4 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x=0$ の近くで適用し、 $\log 2$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。

まず微分計算をしておきます。

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -(1+x)^{-2} & f''(0) &= -1 \\ f^{(3)}(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3} & f^{(3)}(0) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} & f^{(4)}(c) &= -\frac{3!}{(1+c)^4} \end{aligned}$$

従って $n=3$ の時の Taylor の定理によれば、任意の b に対して

$$\log(1+b) = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4(1+c)^4}b^4$$

となる様な c が 0 と b の間に存在する事が解ります。

ここで $b=1$ とすれば

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4(1+c)^4}$$

となって、右辺3項目までの和を近似値、4項目を誤差と考えれば、近似値は $\frac{5}{6} = 0.833\dots$ であり、また $0 < c < 1 = b$ であることから、

$$|(\text{誤差})| = \left| \frac{1}{4(1+c)^4} \right| \leq \frac{1}{4} = 0.25$$

と評価出来るので誤差の限界は0.25となります。

$$\text{近似値} : \frac{5}{6} = 0.83\dots \quad \text{誤差の限界} : 0.25$$

□

基本演習 6 関数 $f(x) = \text{Tan}^{-1}x$ に対して3次の項までを近似値とし4次の項を誤差とする Taylor の定理を $x = 0$ の近くで適用し、 $\frac{\pi}{4}$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。

まず微分計算をしておきます。

$$f(x) = \text{Tan}^{-1}x, \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -(1+x^2)^{-2}(2x) \quad f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -(-2)(1+x^2)^{-3}(2x)^2 - 2(1+x^2)^{-2}$$

$$f^{(3)}(0) = -2$$

$$f^{(4)}(x) = -(-2)(-3)(1+x^2)^{-4}(2x)^3 + 16(1+x^2)^{-3}x - 2(-2)(1+x^2)^{-3}(2x)$$

$$= -6(1+x^2)^{-4}(2x)^3 + 24(1+x^2)^{-3}x$$

$$= \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$f^{(4)}(c) = \frac{24c(1-c^2)}{(1+c^2)^4}$$

Taylor の定理によれば、 $0 < c < 1$ で

$$\frac{\pi}{4} = \text{Tan}^{-1}1 = 1 + \frac{-2}{3!}1^3 + \frac{1}{4!} \frac{24c(1-c^2)}{(1+c^2)^4} 1^4$$

となるものが存在します。

右辺第2項までを近似値、残りを誤差とすれば、

$$(\text{近似値}) = 1 - \frac{1}{3} = 0.666\dots$$

であり、

$$|(\text{誤差})| = \frac{c(1-c^2)}{(1+c^2)^4} \leq c(1-c^2)$$

ですが、簡単な計算により $0 < x < 1$ において関数 $g(x) = x - x^3$ の最大値は $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ですから、

$$|(\text{誤差})| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \leq 0.386$$

□

発展演習 7 微分可能な関数

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

の $x = 0$ の近くでの x のべきによる級数展開はどうなるか考えてみましょう。

まず $g(x)$ を $x \neq 0$ で微分してみると、

$$g'(x) = 2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$g^{(2)}(x) = (-6x^{-4} + 4x^{-6})e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$g^{(3)}(x) = (24x^{-5} - 36x^{-7} + 8x^{-9})e^{-\frac{1}{x^2}}$$

となることから、高階の微分も

$$g^{(n)}(x) = G_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

と書けるであろうと思われます。特に $G_n(x)$ は x^{-1} の多項式になっているはずですね。すると、

$$\frac{g^{(n)}(h)}{h} = \frac{G_n(h)}{h} e^{-\frac{1}{h^2}}$$

であり、 $\frac{G_n(h)}{h}$ の部分はやはり h^{-1} の多項式になっているでしょう。

ここで便宜的に $h^{-1} = y$ とおけば、

$$\frac{g^{(n)}(h)}{h} = \frac{(y \text{ の多項式})}{e^{y^2}}$$

と書ける事から、この式の $h \rightarrow 0$ 即ち $y \rightarrow \infty$ での極限は 0 である事が分かります：

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{(n)}(h)}{h} = 0$$

また、 g を $x = 0$ において微分してみると、

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0$$

であり、更に先ほどの計算により

$$g^{(2)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(h) - g'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(h)}{h} = 0$$

$$g^{(3)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{(2)}(h) - g^{(2)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{(2)}(h)}{h} = 0$$

⋮

$$g^{(n)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{(n-1)}(h) - g^{(n-1)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{(n-1)}(h)}{h} = 0$$

などとなりますから、結局任意の n に対して $g(x)$ は $x = 0$ においても微分可能であり、 $g^{(n)}(0) = 0$ である事が分かります。

したがってもしも関数 $g(x)$ が $x = 0$ の近くで Taylor 展開可能ならば、 $x = 0$ の近くで

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(0)x^n = 0$$

となってしまうこれはオカシイ。 $g(x)$ は $x \neq 0$ では 0 ではないはずですからね。つまりこれは関数 $g(x)$ が $x = 0$ の近くで Taylor 展開不可能である事を示しているわけです。□