

6 Taylor の定理

■今日の講義内容

Taylor の定理

Taylor の定理を使った近似計算と誤差の評価

■講義中にやらなければならない事

基本演習 1,2

■講義終了後次回までにやらなければならない事

今日の講義全体を振り返り（特に話の流れに留意して）内容を把握し直すこと。

基本演習 4,5

重要事項

定理 6.1 [平均値の定理を使った 0 次近似] $f(x)$ が十分微分可能であれば、任意の $a \neq b$ に対して

$$f(b) = \underbrace{f(a)}_{\text{近似値}} + \underbrace{f'(c)(b-a)}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在します。

定理 6.2 [Cauchy の平均値の定理を使った 1 次近似] $f(x)$ が十分微分可能であれば、任意の $a \neq b$ に対して

$$f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a)}_{\text{近似値}} + \underbrace{\frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在します。

定理 6.3 [Cauchy の平均値の定理を使った 2 次近似] $f(x)$ が十分微分可能であれば、任意の $a \neq b$ に対して

$$f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2}_{\text{近似値}} + \underbrace{\frac{1}{3!}f'''(c)(b-a)^3}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在します。

定理 6.4 [Taylor の定理 (n 次近似) J.Gregory, 1671 ; B.Taylor, 1712]

$f(x)$ が何回でも微分出来るとき、任意の $a \neq b$ と任意の正の整数 n に対して

$$f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n}_{\text{近似値}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在する。

Exercise

基本演習 1 e^x に Taylor の定理を適用して Napier 数 e の値を小数点以下 8 桁まで正確に求めて下さい。ただし $1 < e < 3$ であることは既知とします。

基本演習 2 (1) 関数 $f(x) = \cos x$ に対して 2 次の項までを近似値とし 3 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x = 0$ の近くで適用し、 $\cos 1$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい (角度 1 はラジアンです)。

(2) 同様に 6 次の項までを近似値とし 7 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x = 0$ の近くで適用し、 $\cos 1$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。

基本演習 3 $f(x) = \sqrt{1+x}$ に対して 5 次の項までを近似値とし 6 次の項を誤差とする Taylor の定理を適用し、 $\sqrt{3}$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。また、この近似によって $\sqrt{3}$ の値が小数点以下何桁まで確定するかも調べて下さい。

基本演習 4 関数 $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ に対して 3 次の項までを近似値とし 4 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x = 0$ の近くで適用し、 $\sqrt[3]{2}$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。また、この近似によって $\sqrt[3]{2}$ の値が小数点以下何桁まで確定するかも調べて下さい。

基本演習 5 関数 $f(x) = \log(1+x)$ に対して 3 次の項までを近似値とし 4 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x = 0$ の近くで適用し、 $\log 2$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。

基本演習 6 関数 $f(x) = \tan^{-1} x$ に対して 3 次の項までを近似値とし 4 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x = 0$ の近くで適用し、 $\frac{\pi}{4}$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。

発展演習 7 微分可能な関数

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

の $x = 0$ の近くでの x のべきによる級数展開はどうなるか考えてみましょう。