

7 問題演習

2021 S/S 中間試験

問題 7.1 次の級数の積を形式的に展開して、次数の低い方から 5 次の項まで求めてください：

$$\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right)$$

問題 7.2 等比級数の和の公式を使って、次の関数を指定された点の周りでべき級数展開してください：

$$(1) \frac{1}{10-x}, \quad x=8 \text{ のまわりで} \quad (2) \frac{1}{2x-x^2}, \quad x=1 \text{ のまわりで}$$

問題 7.3 ダランベールの判定法を使って次の正項級数が収束するかどうか判定してください：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$$

問題 7.4 次のべき級数の収束半径を求めてください：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3} (x-1)^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^n$$

問題 7.5 次の関数を指定された点の周りでテイラー展開してください：

$$(1) f(x) = e^{2x}, \quad x=0 \quad (2) g(x) = \log(1+x), \quad x=1$$

ただし、展開可能であることは既知とし、展開式は以下の書式に従ってください（一般項は必要ありません）。

$$h(x) = h(a) + h'(a)(x-a) + \frac{h''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{h^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

問題 7.6 2 次の項までを近似値とし、誤差項が 3 次のテイラーの定理を利用して、 $\sqrt{5}$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めてください。ただし、近似値と誤差の限界は、それぞれ正確な値を分数で表したものと、割り算を実行して小数点以下 5 桁まで求めたものの両方を書いてください。

2021 S/S 定期試験（抜粋）

問題 7.7 (1) e^x の、 $x=0$ の周りでの Taylor 展開を求めてください。ただし、展開が可能であることは既知とします。

(2) (1) で求めた展開式の 4 次の項までの和を近似値として e の近似値を求めてください。ただし、近似値は小数第 4 位を四捨五入して小数第 3 位まで求め、誤差は評価する必要はありません。

問題 7.8 次の正項級数が収束するかどうか判定してください。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{50}}{50^n} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{50^n}$$

2016 S/S 中間試験

問題 7.9 $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^2 = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$ となるように a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 を求めて下さい。

問題 7.10 次の正項級数が収束するかどうかダランベールの判定法によって調べて下さい。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2^n)^2}{5^n}$$

問題 7.11 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n} (x-2)^n \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

問題 7.12 等比級数の和の公式を上手く変形して関数 $\frac{3}{x-1}$ を $x=9$ のまわりでべき級数に展開して下さい。

問題 7.13 関数 $f(x) = \cos x$ の、 $x = \frac{\pi}{3}$ でのテイラー展開を求めて下さい。ただし展開可能であることは既知とし、4 次の項までは具体的に求め、あとは『+・・・』で省略して書いて下さい（一般項は必要ありません）。

問題 7.14 関数 $f(x) = \log(x+1)$ に対して、 $x=0$ のまわりで 4 次の項までを近似値とするテイラーの定理を使って $\log 1.02$ の近似値を求め、そのときの誤差の限界も求めて下さい。

2016 S/S 定期試験（抜粋）

問題 7.15 関数 $f(x) = \sin x$ の、原点での Taylor 展開を求めて下さい。ただし、展開の可能性は既知とします。

一般項はなくても構いませんが、少なくとも最初の 0 でない 3 項は具体的に書いて下さい（その後は『+...』で結構です）。

問題 7.16 関数 $p(x) = \tan^{-1}x$ に対して 3 次の項までの和を近似値とし、誤差項が 4 次の Taylor の定理を原点のまわりで適用し、 $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ の近似値とその誤差の限界を求めて下さい。

問題 7.17 次のべき級数の収束半径を求めて下さい：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$$

2015 S/S 中間試験

問題 7.18 $\sqrt{1-x^2} = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ と置いてこれの自乗の展開式を左右辺で係数比較して a_1, a_2, a_3, a_4 を求め、 $\sqrt{1-x^2}$ のべき級数展開を 4 次の項まで求めて下さい。

問題 7.19 (1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}}$ が収束するかどうかダランベールの判定法によって調べて下さい。

(2) ダランベールの判定法では収束判定が出来ない正項級数の例を挙げて下さい。

問題 7.20 次の各文章が正しいかどうか ○／× のみで答えて下さい。

(1) $x = b$ で収束する x のべき級数は $x = b$ で絶対収束します。

(2) 調和級数は収束します。

(3) 2 つの正項級数 $\sum v_n, \sum w_n$ があって、 $\sum w_n$ は $+\infty$ に発散しており、また任意の n について $v_n < w_n$ であるとします。このとき $\sum v_n$ も $+\infty$ に発散します。

問題 7.21 べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{5^n n^3}$ の収束半径を求めて下さい。

問題 7.22 等比級数の和の公式を上手く変形して次の関数を指定された点のまわりでべき級数に展開して下さい。

(1) $\frac{1}{1-x^2}$ 、 $x = 0$ のまわりで。 (2) $\frac{x}{x-1}$ 、 $x = 10$ のまわりで。

問題 7.23 関数 $f(x) = \cos x$ の、 $x = \frac{\pi}{4}$ でのテイラー展開を求めて下さい。ただし展開可能であることは既知とし、3 次の項までは具体的に求め、あとは『+...』で省略して書いて下さい（一般項は必要ありません）。

問題 7.24 (1) 3 次の項までを近似値とするテイラーの定理を使って $\log 1.02$ の近似値を求め、そのときの誤差の限界も求めて下さい。

(2) 近似値を求めるにあたってテイラーの定理が優れている点を述べて下さい。

2015 S/S 定期試験（抜粋）

問題 7.25 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

問題 7.26 等比級数（幾何級数）の和の公式を使って関数 $\frac{2}{x+1}$ を $x = 0$ のまわりでべき級数に展開して下さい。

問題 7.27 次の各関数の指定された点のまわりでのテイラー展開を求めて下さい。その際一般項も必ず求めて下さい。ただし展開が可能である事は既知とします。

(1) $f(x) = \cos x$ 、 $x = 0$ のまわりで。

(2) $g(x) = \log x$ 、 $x = 1$ のまわりで。

問題 7.28 $h(x) = \sqrt[3]{1+x}$ に対して 2 次の項までを近似値とするテイラーの定理を適用し、 $\sqrt[3]{2}$ の近似値を求め、そのときの誤差の限界も求めて下さい。

更に過去の問題

問題 7.29 等比級数の和の公式を使って次の関数を指定されたべき級数で表してください。

$$(1) \frac{1}{1+x} \text{ を } x-5 \text{ のべき級数で。} \quad (2) \frac{x}{1+x^2} \text{ を } x \text{ のべき級数で。}$$

問題 7.30 正項級数の収束／発散を判定する 1 つの方法としてダランベールの判定法があります。

(1) 彼の考えは級数 $\sum p_n$ をある特殊な級数と比較してみようと言う精神に基づいていますが、そのあたりの事情を含めてなぜこの極限値を計算する事が鍵となるのかを大雑把に説明して下さい。

$$(2) \text{ ダランベールの判定法を適用して級数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n} \text{ の収束／発散を判定して下さい。}$$

問題 7.31 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^n} x^{2n+1}$$

問題 7.32 関数 $\sin x$ の、 $x = \pi$ のまわりでのテイラー展開を求めて下さい。ただし、展開が可能であることは既知とします。

問題 7.33 次の各関数の $x = 0$ のまわりでの Taylor 展開の最初の (0 でない) 3 項を求めて下さい。ただし、展開可能性は既知とします。

$$(1) g(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \quad (2) f(x) = \tan^{-1} x$$

問題 7.34 2 つのべき級数

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots, \quad 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

の積を形式的に計算して、次数の低い方から x^7 の項まで求めてください。

問題 7.35 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ は収束するでしょうか。

問題 7.36 べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^3} x^n$ の収束半径を求めてください。

問題 7.37 等比級数の和の公式を使って関数 $\frac{2}{3-x}$ を $x-1$ のべき級数に展開してください。

問題 7.38 次の各関数の指定された点のまわりでの Taylor 展開を求めてください。ただし、展開の可能性は既知とします。

$$(1) f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x = 0 \text{ のまわりで。}$$

$$(2) g(x) = \log x, x = 1 \text{ のまわりで。}$$

問題 7.39 Taylor の定理を使って、Napier 数 e の値を小数点以下 5 桁まで正確に求めてください。ただし、 $2 < e < 3$ である事は知っているものとします。

問題 7.40 関数 $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ の $x = 0$ の周りでのテイラー展開 (つまり、マクローリン展開) を求めて下さい。ただし、展開が可能であることは既知とします。

問題 7.41 関数 $f(x) = \sqrt{1+x}$ に対して Taylor の定理を使って、 $\sqrt{2}$ の近似値とその場合の誤差の限界を求めて下さい。

課題 第 3 回

課題 3.1 問題 7.27(1)、7.15、7.7(1)

課題 3.2 問題 7.2、7.6、7.36、7.19(1)

出題：5 月 23 日

出席者用提出期限：5 月 23 日 講義終了時

欠席者用提出期限：5 月 30 日 17 時 00 分 00 秒