

8 2変数関数の極限值 その1

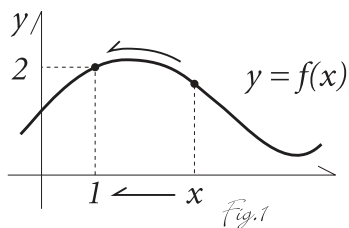
8.1 1変数関数の極限値の復習

おそらくこんな数式：

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

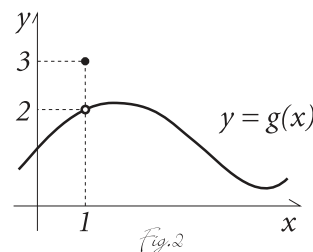
を見た事があるでしょう。これは『 x を 1 に近づけた時の $f(x)$ の極限値は 2 である』と読みますが、改めてこの式の意味するところを確かめておきましょう。

素朴にその意味を文章化すると、これは『 x を 1 に近づけると関数 $f(x)$ の値は 2 に近づいてゆく』と云う事な訳ですが、



例えば次の図の様なグラフをもつ関数の場合には“具体的に”何を言っているのでしょうか。図を見る限り、これは『 $f(1) = 2$ だ』と言っているだけの様に思えます。ならばなぜわざわざ極限の記号を使うのでしょうか？その辺りをはっきりさせるために次のグラフを見て下さい。

このようなグラフをもつ関数 $g(x)$ を考えてみましょう。よく見て下さい。グラフの曲線の $x = 1$ に対応するところは白丸、つまり“抜けて”います。曲線はその 1 点で切れているわけです。で、 $g(1)$ は飛んで 3 と定義されていますね。



これは如何にも人工的な“病的な”例ではあるのですが、こう云うものも関数であるわけですし、『苦境においてこそその人物の真価が発揮される』と言われる様に、むしろこう云った病的な場合を見る事によって改めて浮き彫りになる様な事柄もあります。

この fig.2 の様なグラフをもつ関数の場合には、 $x \neq 1$ の範囲において x を 1 に近づけると関数の値 $g(x)$ は 2 に近づいて行きます。

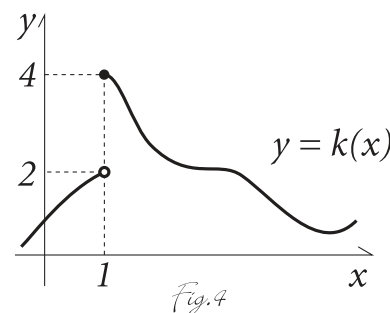
- (i) $x = 1$ のときの関数の値は $g(1) = 3$ である。
- (ii) $x = 1$ 以外の部分から 1 に近づけると $g(x)$ は 2 に近づいて行く。

この 2 つの値のうち、どちらが『 $x \rightarrow 1$ とした時の極限値』と呼ぶにふさわしいのでしょうか？ それは当然 (ii) です。

そもそも『 x を 1 に近づけた時に $g(x)$ がどんな値に近づくのか』を問題にすると云うことは、ただ単純に代入した値 $g(1) = 3$ が知りたいわけではないのです。知りたいのは『そこでの値が幾らなのか』ではなくて、『その周りでどうなっているか』なのです。

こここのところをはっきりさせるために、単に x を 1 に近づけると言うのではなくて、『 $x \neq 1$ である範囲内で x を 1 に近づける』などと言った方が良いかも知れませんね。

次にもう 1 つ病的な例を見てみましょう。



この様に、 $x = 1$ で定義はされているけれどもそこでグラフが切れている時には、1 に左から近づけると 2、右から近づけると 4 となり $x \rightarrow 1-0$ と $x \rightarrow 1+0$ で収束先が異なってしまう、一概に『 x を 1 に近づけたとき $k(x)$ がある値に近づく』とは言えませんね。どちらに収束すると考えてももう一方が『そりゃないぜ』と言って来ますから。

この様に近づき方（方向）によって収束先が違う場合にはこの関数は $x \rightarrow 1$ のとき如何なる値にも収束しないと考えます。

このような場合に『ああ、これは収束しないから』と言って切り捨ててしまうことになるわけですが、『いや、でも、どちらか片側から近づく分には収束してるんだけどね』と惜しむ声が聞こえて来ます。

そこで、こう云った左右どちらか一方からの極限値のことを $\lim_{x \rightarrow 1-0} k(x) = 2$ あるいは $\lim_{x \rightarrow 1+0} k(x) = 4$ であるとして、片側極限と言います。動詞で使う時には『(例えば右から) 片側収束する』と言っても良いのですが、単に $x \rightarrow 1+0$ のとき収束すると言えば十分です。

まとめ

- 極限値と云うのは、“そこ”での値が知りたいわけではなく、むしろその“まわりで”どうなっているかを知りたいのです。
- 近づけ方によって収束値が違っている時は、極限値は存在しないと考えます。

8.2 2変数関数の極限值 overview

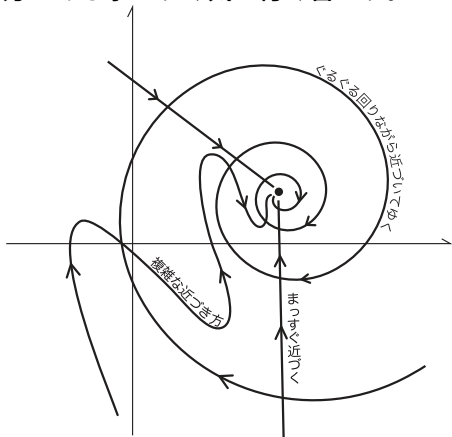
以上の1変数関数の場合の状況を踏まえて2変数関数の場合を見てみましょう。

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$$

と書いて、 (x,y) を (a,b) に近づけて行った時の $f(x,y)$ の極限值とするわけです。

まず初めに確認しておきたい事は、さっきまとめた様に、これは関数の点 (a,b) での値が知りたいと云う事ではありません。むしろその点では定義されていない場合も多いでしょう。その点の近くでどうなっているかが知りたいのです。ここをはっきりさせるために、『 $(x,y) \neq (a,b)$ である範囲内で (x,y) を (a,b) に近づけて行った時』と言った方が適切かも知れません。

また、まとめの2番目にある様に、近づき方によって収束先が違っている様ではそれは極限值として認められないと云うことは2変数になってもその通りでしょう。そして2変数(2次元)の場合には『 (x,y) を (a,b) に近づける』と言っても実に様々な近づき方がある事にすぐ気が付く筈です。



まっすぐ近づいて行く近づき方にしてもどの方向からまっすぐなのか 360° ありますし、まっすぐ近づくだけが近づき方ではありません。ぐるぐる回りながら近づいたって良い訳ですし、もっと複雑な近づき方だってあるでしょう。

で、それら様々な近づき方の全てにおいて同じ値に収束していなければこれは2変数関数の極限值とは呼ばないのです。

この様に、2変数の場合は、無限にある近づき方の全てにおいて同じ値に収束していなければ極限值としては認められません。これはなかなかハードな条件ですから極限值が存在しない可能性も高くなります。最初から『極限值は存在しないのではないか』と疑ってみた方が良いでしょう。

8.3 極限值が存在しない場合その1 座標軸で片がつく場合

極限が存在しない事を示すのは簡単で、何か2つの近づけ方で収束値が違うものを見つけてしまえば良いわけですからまずは簡単な近づけ方、即ち、座標軸に平行に近づけてみて様子を見てみましょう。

例題 8.1 次の極限值：

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2y}{x+y}$$

が存在するかどうか調べ、存在するなら値を求めて下さい。

この関数を x -軸上(ただし原点は除く¹)に限ってその値を見てみると、 x -軸上では $y=0$ なので、

$$\frac{2y}{x+y} = \frac{0}{x} = 0$$

となっており、 x -軸上では一定値0をとっている事が分かります。従って、この軸に沿って (x,y) を $(0,0)$ に近づけて行くと関数の値は0に近づいて行きます²。

一方 y -軸で同じ事を考えると、 y -軸上(こちらも原点は除きます)での関数の値は

$$\frac{2y}{x+y} = \frac{2y}{y} = 2$$

であり、やはり一定値2ですので y -軸に沿って近づけた時は2に近づいて行きます。

この様に2つの異なる方向から近づけてみて異なる値に近づいて行っている訳ですから、問題の極限值は存在しないと云う事になります。

基本演習 1 次の極限值が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

¹原点での極限值を考えると云うことは、原点の近くの、原点以外のところでの値を見ると云う事です。

²これが“近づいて行く”と言うのは若干違和感がありますが、1, 1, 1, ... の様なずっと同じ項が続く数列も極限は1、すなわち1に近づいて行くと言いますので慣れて下さい。

8.4 極限値が存在しない場合その2 座標軸だけではダメな場合

演習問題の (1)、(2) は例題同様に座標軸に沿って近づける2通りを試してみる事で極限値が存在しない事が証明出来た筈ですが (3) はちょっと様子が違ってきます。

(3) まずは座標軸に沿って考えてみましょう。

x -軸上での関数の値は

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

であり、一方 y -軸上での関数の値は

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

となっており、どちらの軸に沿って近づけても関数値は 0 に近づいて行きます。

この事実から私たちは『極限値は 0 である』と結論する事が出来るでしょうか？

残念ながらそれは出来ません。なぜなら私たちは『高々2つの近づけ方を試してみたに過ぎない』からです。極限値と云うものは『どんな近づけ方をしても』同じ値に収束していなければいけません。たった2つの近づき方をチェックして、たまたまそれらが同じ値だったとしてもそれが何になるでしょうか。

そこでもう少し別の近づき方で試してみようと思います。座標軸の次に考えるべき“簡単な”近づけ方は何でしょうか。まあ、何でも良いのですが、直線 $y = x$ に沿って近づけてみましょう。この直線上での関数の値を調べてみると：

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

ですね。この直線上では常に一定値 $\frac{1}{2}$ になっていますから、この直線に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけて行くと極限は $\frac{1}{2}$ になってしまいます。これはさっき計算した (例えば) x -軸に沿って近づけた時の極限値とは違ってしまいますね。これでチェック終了です。

x -軸に沿って近づけた場合と、直線 $y = x$ に沿って近づけた場合とでは極限値が違いますので、『どんな風に近づけても』ある値に近づくと云う事はあり得ず、従って極限値は存在しないと云う事になります。

基本演習 2 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^4 + y^4} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y}$$

(1) は斜めの直線に沿った極限を考えれば問題ありません。

(2) まずは座標軸に沿った極限を見てみましょう。 x -軸上 (原点除く) での関数値は

$$\frac{x^3}{x^2 + y} = \frac{x^3}{x^2} = x$$

ですので、この軸に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけてゆくと極限値は 0 です。一方 y -軸上 (原点除く) では関数の値自体が

$$\frac{x^3}{x^2 + y} = \frac{0}{y} = 0$$

と云う風に一定値 0 ですので、この軸に沿った極限値も 0 になります。

2つの座標軸でやって同じ値になってしまったので次は“斜めの直線”を試してみましょう。直線 $y = x$ 上ではどうなっているかと云うと (ただし原点は除きます)、

$$\frac{x^3}{x^2 + y} = \frac{x^3}{x^2 + x} = \frac{x^2}{x + 1}$$

ですからこの直線に沿った場合もやはり 0 に近づいてゆく事が分かります。

こうなるとまた別の近づけ方を試してみなくてはいけなくなりますが、折角なので一度の計算でいろんな近づけ方をチェック出来る方法を見ておきましょう。

この関数を、 m を 0 でない任意の実数として直線 $y = mx$ 上で考えるとどうなっているでしょうか。いちいち傾きが 2 のとき、3 のとき、... などとやるよりもこんな風にまとめてやれば効率がいいでしょう。 $m = 0$ のケースは x -軸を意味しますから既にチェック済みですよ。しかしこの直線上 (ただし原点は除く) での関数の値を見ると

$$\frac{x^3}{x^2 + y} = \frac{x^3}{x^2 + mx} = \frac{x^2}{x + m}$$

ですから、この場合の極限値も 0 になっています。

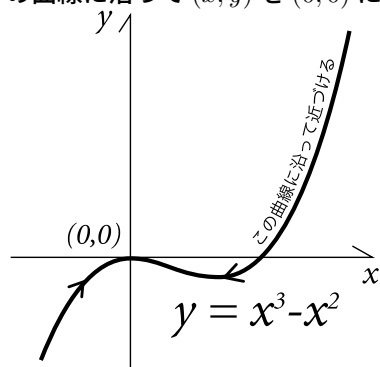
あれ？ やっぱり 0 ですか。360° どんな方向から近づけても極限値は 0 だと言う事になります。と云う事は求める極限値は 0 なのでしょう。私たちはそう結論しても良いのでしょうか？ だって 360° やって見たんですからそろそろ良いんじゃないでしょうか。

しかし、残念ながら、またしても答えは No です。

だって私たちはまだ『直線的に近づくケース』しかチェックしていませんよね？ ぐるぐる回りながら近づいて行く場合やもっと複雑なカーブを描いて近づいて行く様な場合に対しては未だノーチェックなんです。だから（仮に求める極限値が本当に 0 だったとしても）以上の私たちの議論からは何ら結論を下す事は出来ないのです。

ちなみに言うと答えは『極限値は存在しない』です。360° どの方向から近づけても同じ値 0 に収束しているのに極限値は存在しないんです。

3 次曲線 $y = x^3 - x^2$ を思い浮かべて下さい。原点を通る曲線ですよ（下図）。この曲線に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけてみるとどうなるでしょうか。



実はこの曲線上での関数値を調べてみると

$$\frac{x^3}{x^2 + y} = \frac{x^3}{x^2 + x^3 - x^2} = 1$$

となっていて一定値 1 になっているんです。然らばこの曲線に沿った極限値も 1 になる他ありませんね。これで証明終了、題意の極限値は存在しません。

残念ながらこのような特殊な曲線に沿った近づけ方を見つけるには色々難しさがあって一筋縄にはいきません。ですからこの講義ではそこまでは要求しません。

360° どの方向から（直線に沿って）近づけても同じ値に近づいている場合には、最初の態度を改めて、『極限値は存在するのかも知れない』と考えて下さい。そうして次回に勉強する『極限値が存在する事を証明する方法』を試してみる事をお勧めします。勿論それが上手く行く保証はありませんが（つまり、やはり極限値は存在しない）、その場合、問題は非常に難しいと云う事になりますので出来なくてもそれほど問題はありません。

Exercise

基本演習 1 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

基本演習 2 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^4 + y^4} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y}$$

基本演習 3 次の関数の $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ での極限値を求めて下さい。存在しない場合は存在しない事を証明して下さい。

$$(1) \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad (2) \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad (3) \frac{x^4}{x^2 + y^4} \quad (4) \frac{x^2}{2x + y}$$

$$(5) \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} \quad (6) \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} \quad (7) \frac{x^4}{x^3 + y^3}$$