

9 2 変数関数の極限值 その 2

9.1 先週の演習問題の解答例

いずれも与えられた関数の $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ での極限值を求めるか、あるいは存在しない場合は存在しない事を証明して下さいと云う問題でした。

$$(5) \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$$

まずは座標軸に沿った極限を見てみましょう。 x -軸上（原点除く）での関数値は

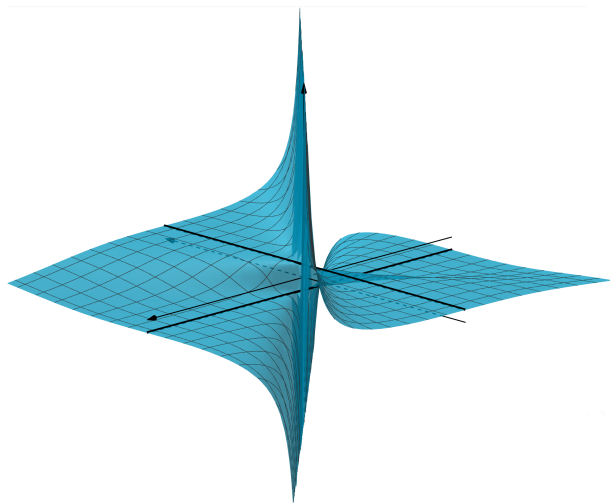
$$\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{x^3}{x^3} = 1$$

ですので、この軸に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけてゆくと極限值は 1 です。一方 y -軸上（原点除く）での関数の値は

$$\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{-y^3}{y^3} = -1$$

と云う風に一定値 -1 ですので、この軸に沿った極限值は -1 になります。

この様に、2つの異なる近づけ方で異なる値に収束しますので、問題の極限值は存在しません。 □



$$(6) \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$$

まずは座標軸に沿った極限を見てみましょう。 x -軸上（原点除く）での関数値は

$$\frac{x^2 y}{x^3 + y^3} = \frac{0}{x^3} = 0$$

ですので、この軸に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけてゆくと極限值は 0 です。一方 y -軸上（原点除く）でも関数の値は

$$\frac{x^2 y}{x^3 + y^3} = \frac{0}{y^3} = 0$$

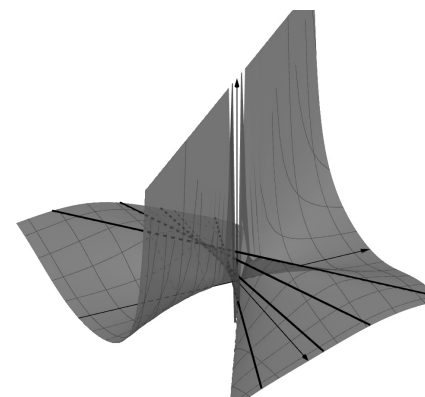
と云う風に一定値 0 ですので、この軸に沿った極限值も 0 になります。

2つの座標軸でやって同じ値になってしまったので次は“斜めの直線”、直線 $y = x$ 上で考えてみましょう。この直線上（ただし原点は除く）での関数の値を見ると

$$\frac{x^2 y}{x^3 + y^3} = \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{as } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

ですから、この場合の極限值は $\frac{1}{2}$ になっています。

この様に、2つの異なる近づけ方で異なる値に収束しますので、問題の極限值は存在しません。 □

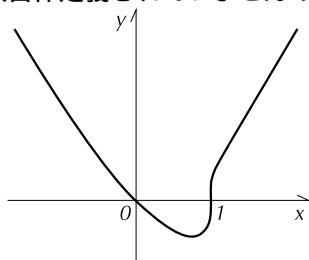


$$(4) \frac{x^2}{2x+y}$$

直線に沿って近づける分には（分母が 0 になる $y = -2x$ 以外では） 360° 全て 0 に収束していますが、放物線： $y = x^2 - 2x$ に沿って近づけると 1 に近づきますので、(4) の極限値は存在しません。□

$$(7) \frac{x^4}{x^3+y^3}$$

これは 360° どの方向から直線に沿って近づけても（ただし、直線 $y = -x$ 上では関数自体定義されていませんので除きます）0 に収束しています。

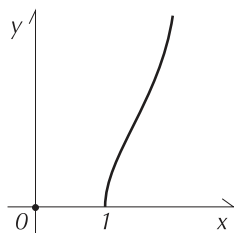


従って現時点では答えは不明ですが、タネを明かせば（分子）＝（分母）と云う曲線： $y^3 = x^4 - x^3$ すなわち $y = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$ が下図の様に原点を通っているこの曲線に沿った極限値が 1 になってしまい、結論として極限値は存在しません。□

$$(2) \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

【間違った解答例】

座標軸に沿って近づけると極限値は共に 0 ですが、曲線 $y = \sqrt{x^3 - x^2}$ にそって近づけると、この曲線上では関数の値は常に 1 なので極限値も 1 となり、近づけ方によって収束値が違うので問題の極限値は存在しません。□



一見正しそうに見えますが、実は曲線 $y = \sqrt{x^3 - x^2}$ は原点を通りません。

いや、正確に言えば通る事は通るのですが、下図のようになっていて原点は孤立してしまっています。従ってこの曲線にそって原点に近づく事は不可能ですからこの解答は間違いです。

$$(1) \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

まずは座標軸に沿った極限を見てみましょう。 x -軸上（原点除く）での関数値は

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

ですので、この軸に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけてゆくと極限値は 0 です。一方 y -軸上（原点除く）でも関数の値は

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

と云う風に一定値 0 ですので、この軸に沿った極限値も 0 になります。

2つの座標軸でやって同じ値になってしまったので次は“斜めの直線”を試してみましょう。直線 $y = x$ 上でやっても良いのですが、いっそのこと m を 0 でない任意の実数として直線 $y = mx$ 上で考えてみましょう。この直線上（ただし原点は除く）での関数の値を見ると

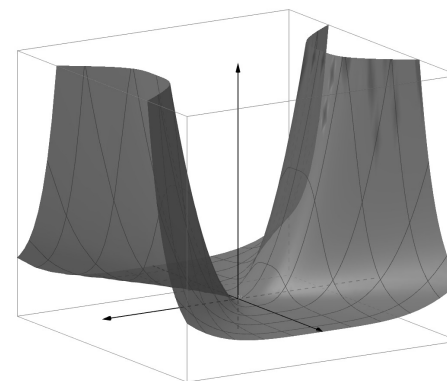
$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{m^2 x^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{m^2}{1 + m^2} x^2 \rightarrow 0 \quad \text{as } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

ですから、この場合の極限値も 0 になっています。

以上の様に 360° どの方向から近づけても 0 に収束しますが何も結論出来ません。□

$$(3) \frac{x^4}{x^2 + y^4}$$

直線に沿って近づける分には 360° 全て 0 に収束していますから現状不明です。□



9.2 極限値が存在する場合 ~ 0 に収束する事を如何に示すか

極限値が 0 である事を証明するには、前にも書いた通り、『どんな近づけ方をしても』 0 に近づく事をしらみつぶしにチェックして行く事は不可能です。

そこで、こう云ったケースでは不等式による評価をして『関数の絶対値が 0 に収束するものより小さい』事を示す事に成ります（はさみうちの原理）。

問題 9.1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ を証明して下さい。

【解答例 その 1 極座標による方法】 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と置けば、

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \right| = \left| \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} \right| = |r \cos^2 \theta \sin \theta| = r |\cos \theta|^2 |\sin \theta|$$

ですが、 $|\cos \theta| \leq 1, |\sin \theta| \leq 1$ なので $\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq r$ となり、結局、

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq r$$

である事が分かります。そこでこの式の各項に於いて $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ の極限をとってやれば、左右辺が 0 に収束しますので、中辺も 0 に収束する事が分かります。□

今最後に使った議論は『はさみうちの原理』と言います。

事実 9.2 3つの関数 $f(x, y), g(x, y), h(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ 以外の点で

$$f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$$

を満たしていて、かつ、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y) = p$$

であるとき、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y)$ も存在して $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = p$ です。

今見た解答の本質ははさみうちにもって行くことです。極座標に移行し三角関数を導入したのも、三角関数であれば評価が容易であるからです。

と云う事は、はさみうちにもって行けるのであれば、必ず極座標を導入しなければならないわけではありません。実際、極座標にしなくても（三角関数を導入しなくても）以下のように評価は可能です。

【解答例 その 2】 y -軸上以外の点では

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x^2 y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 |y|}{x^2 + 0} = |y|$$

と評価され、不等式

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \quad (9.1)$$

が成立します。しかし y -軸上（ただし原点は除きます）での関数の様子を見ると

$$\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

であって、先の不等式 (9.1) は原点以外の全ての点で成り立っていることが分かります。従ってはさみうちの原理によって題意は証明されました。□

問題 9.3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \frac{y}{x}$ が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

この関数は y -軸上では定義されていませんが、 x -軸に沿った極限やその他の直線に沿った極限は全て 0 になってしまいます。

そこで 0 に収束する事を証明してみましようかと云うことになるのですが、この問題の様に既に関数の中に三角関数が入っている場合は、先ずこれを直接評価して何とかならないか見てみましょう。

つまり、絶対値を取ったあとにすぐに評価のステップに入るわけです：

$$\begin{aligned} \left| x \sin \frac{y}{x} \right| &= |x| \left| \sin \frac{y}{x} \right| \\ &\leq |x| \cdot 1 \end{aligned}$$

これは

$$0 \leq \left| x \sin \frac{y}{x} \right| \leq |x|$$

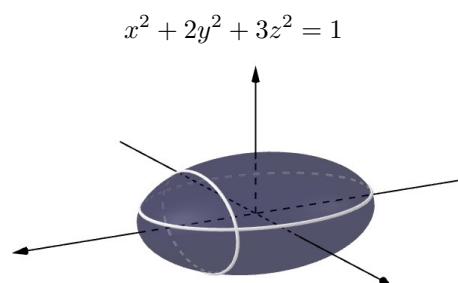
を意味し、左辺、右辺が $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ で 0 に収束する事から中辺も 0 に収束する事が分かります。□

9.2.1 極限値が 0 以外の場合

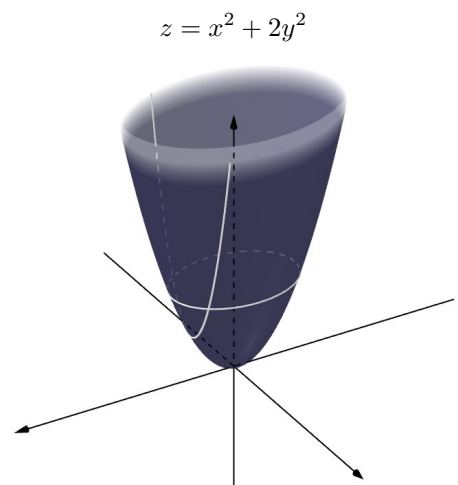
例えば $f(x, y)$ の $(x, y) \rightarrow (a, b)$ での極限値が p であることを示す場合には、 $f(x, y) - p$ が 0 に収束することを示せば良いわけですから、 $f(x, y) - p$ に対して上手く変形を施してやってはさみうちにもって行けば良いでしょう。

9.3 2 変数関数のグラフ

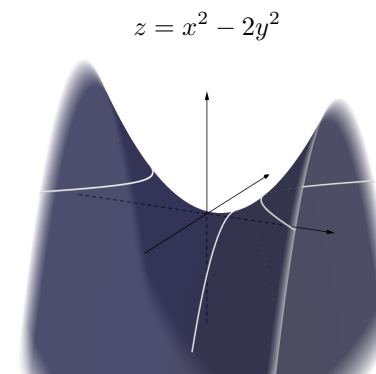
9.3.1 楕円面



9.3.2 楕円放物面



9.3.3 双曲放物面



Exercise

基本演習 1 次の関数の $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ での極限値が 0 であることを証明して下さい。

$$(1) \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad (2) \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad (7) x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3) \frac{x^4}{x^2 + y^4}$$

基本演習 2 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x + y} \quad (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (5) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cos \frac{x}{y} \quad (6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x + y}$$

$$(7) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad (8) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^{-1}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

発展演習 3 何か 0 に収束しない関数の極限値を、そうとは知らずに 0 に収束するものと勘違いして証明しようとしている状況を考えて下さい。何でも良いので 0 に収束しない極限値に対して今日の極座標を使ったやり方で 0 に収束する事を証明しようとしてみて下さい。もちろん正しく証明する事は出来ませんが、なぜ出来ないのか、どう云う風に困るのかよく見ておいて下さい。