9　２変数関数の極限値　その２

Exercise 解答例

基本演習 1 次の関数の $(x,y) \to (0,0)$ での極限値が 0 であることを証明して下さい。

(1) $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$　(2) $\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$　(7) $x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(3) $\dfrac{x^4}{x^2+y^4}$

(1) 関数の絶対値をとって極座標にして考えれば

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| &= \left|\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\right| \\ &= |r^2\cos^2\theta\sin^2\theta| \\ &= r^2|\cos\theta|^2|\sin\theta|^2\end{aligned}$$

ですが、ここで $|\cos\theta| \le 1,\ |\sin\theta| \le 1$ から、

$$\le r^2$$

となって結局不等式：

$$0 \le \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \le r^2$$

が得られますが、ここで各辺で $(x,y) \to (0,0)$ の極限をとれば左右辺が 0 に収束しているので中辺も 0 に収束する事が分かり、従って、求める極限値も存在して 0 です。

(2) 関数の絶対値をとって極座標にして考えれば

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^3\cos^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\right| = |r\cos^3\theta| = r|\cos\theta|^3$$

ですが、$|\cos\theta| \le 1$ から不等式：

$$0 \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \le r$$

が得られ、ここで各辺で $(x,y) \to (0,0)$ の極限をとれば左右辺が 0 に収束しているので中辺も 0 に収束する事が分かり、従って、求める極限値も存在して 0 です。

(7) このような場合は、$x\sin f(x,y)$ の $f(x,y)$ の所がどんな関数であったとしても、定義域内では

$$0 \le |x\sin f(x,y)| \le |x|$$

と評価されますので、左右辺が 0 に収束する事からやはり中辺も 0 に収束する事が分かります。

(3) 絶対値をとって極座標で見てみると、

$$\left|\frac{x^4}{x^2+y^4}\right| = \left|\frac{r^4\cos^4\theta}{r^2\cos^2\theta+r^4\sin^4\theta}\right| = \frac{r^2|\cos\theta|^4}{|\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta|}$$

であり、分子の三角関数を評価すれば

$$\left|\frac{x^4}{x^2+y^4}\right| \le \frac{r^2}{|\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta|}$$

が得られますがこの先どうして良いのか分からなくなってしまいます。

そこで、分子の評価はせずに、分母を小さいもので置かえる方向で検討すると、

$$|\cos^2\theta| \le |\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta|$$

なので、y-軸以外では[1]

$$\left|\frac{x^4}{x^2+y^4}\right| = \frac{r^2|\cos\theta|^4}{|\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta|} \le \frac{r^2|\cos\theta|^4}{|\cos^2\theta|} = r^2|\cos\theta|^2 \le r^2$$

となります。従って、y-軸以外の部分では

$$0 \le \left|\frac{x^4}{x^2+y^4}\right| \le r^2$$

が成り立っている事が分かります。

しかし、y-軸の原点以外ではこの関数の値が 0 だった事と合わせて考えれば、原点以外であれば y-軸上でも上の不等式が成り立っている事が分かります。

ここで各辺で $(x,y) \to (0,0)$ の極限をとれば左右辺が 0 に収束しているので中辺も 0 に収束する事が分かり、従って、求める極限値も存在して 0 です。

[1] y-軸を除くのは、評価後の分母 $|\cos^2\theta|$ が 0 になる事を防ぐためです。

こう考えて来ると、極座標をとらなくても同様の議論が出来る事に気が付きます。

まず y-軸以外の部分では

$$\left|\frac{x^4}{x^2+y^4}\right| \leq \left|\frac{x^4}{x^2}\right| = x^2$$

が成り立っています。

また、y-軸上では関数の値は常に 0（もちろん原点は除きます）でしたから、この不等式は結果的には原点以外で常に成り立っています。

そこで $(x,y) \to (0,0)$ と近づけて行けば関数の値は 0 に収束する事が分かります（挟み撃ちです)。 □

基本演習 2 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$　(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\frac{x}{y}$　(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x+y}$

(7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$　(8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{Sin}^{-1}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(1) まず座標軸上（原点は除く）でのこの関数の値を調べてみると、分子が xy であるために明らかに 0 になっています。従って座標軸に沿って $(x,y) \to (0,0)$ と近づけた場合には関数の値は 0 に収束します。

一般に直線 $y = mx$ 上での関数の値を見ると、

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{mx^2}{\sqrt{1+m^2}|x|} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}|x| \to 0$$

となってやはりこの直線に沿った極限値も 0 になっています。

そこで方向転換して極限値が 0 であることを示そうと考えます。そのために絶対値をとり、更に極座標を導入して考えれば

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{r^2\cos t\sin t}{r}\right| = r|\cos t||\sin t| \leq r$$

と評価されますので、結果的に不等式：

$$0 \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq r$$

が得られ、各辺の極限値を考えれば挟み撃ちの原理から中辺は 0 に収束することが分かります。

以上から求める極限値は存在して 0 です。

(2) この関数の x-軸上（ただし原点は除く）での値は

$$\frac{x}{x+y} = \frac{x}{x} = 1$$

なので、x-軸に沿って (x,y) を原点に近づけた場合の極限値は 1 です。

一方 y-軸上（原点は除く）では常に 0 となっているため y-軸に沿った極限値は 0 です。

以上から、近づけ方によって収束先が異なるので題意の極限値は存在しません。 □

(3)

$$\left|\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad ((x,y)\to(0,0))$$

なので、はさみうちの原理により、問題の極限値は存在して 0 です。

(4) x 軸上（原点は除く）では

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

ですから、x 軸に沿って $(x,y) \to (0,0)$ としたとき関数値は 0 に収束します。

また、直線 $y = x$ の上（原点以外）では

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

となっているため、この直線に沿って $(x,y) \to (0,0)$ としたとき関数値は 1 に収束します。

このように、近づき方によって収束値が異なっているので、問題の極限値は存在しません。

(5)

$$\left|x\cos\frac{x}{y}\right| \leq |x| \to 0 \quad ((x,y)\to(0,0))$$

なので、はさみうちの原理により、問題の極限値は存在して 0 です。

(6) y 軸上（原点は除く）では関数値は 0 なので、y 軸に沿って $(x,y)\to(0,0)$ とした場合は関数値は 0 に収束します。

一方、曲線 $y=x^2-x$ の上では関数値は一定値 1 であり、この曲線に沿って $(x,y)\to(0,0)$ とした場合は関数値は 1 に収束します。

このように、近づき方によって収束値が異なっているので、問題の極限値は存在しません。

(7) 原点以外の座標軸上ではこの関数は一定値 0 ですから、座標軸に沿って $(x,y)\to(0,0)$ とした場合は関数値は 0 に収束します。
一方、曲線 $2xy^2=x^2+y^4$、即ち、放物線 $x=y^2$ 上（ただし原点は除く）ではこの関数の値は一定値 $\frac{1}{2}$ ですから、この曲線に沿って $(x,y)\to(0,0)$ とした場合は関数値は $\frac{1}{2}$ に収束します。

このように、近づき方によって収束値が異なっているので、問題の極限値は存在しません。

(8) $\mathrm{Sin}^{-1}(x^2+y^2)=z$ と置けば、$(x,y)\to(0,0)$ のとき $z\to 0$ であって

$$\frac{\mathrm{Sin}^{-1}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{z}{\sin z}\to 1$$

ですから、問題の極限値は存在して 1 です。

□

発展演習 3 何か 0 に収束しない関数の極限値を、そうとは知らずに 0 に収束するものと勘違いして証明しようとしている状況を考えて下さい。何でも良いので 0 に収束しない極限値に対して今日の極座標を使ったやり方で 0 に収束する事を証明しようとしてみて下さい。もちろん正しく証明する事は出来ませんが、なぜ出来ないのか、どう云う風に困るのかよく見ておいて下さい。

前の問題の (2) 番でやってみましょう。

$$\left|\frac{x}{x+y}\right|=\left|\frac{r\cos t}{r\cos t+r\sin t}\right|=\frac{|\cos t|}{|\cos t+\sin t|}$$

はすぐに出来ますが、これをどうやって評価しましょうか。
分子を評価してしまうと、

$$\frac{|\cos t|}{|\cos t+\sin t|}\leq\frac{1}{|\cos t+\sin t|}$$

となって上手く行きません。
分母を小さくする方向で考えようとしてもなかなか難しいですね。

端的に言って 0 に収束する r が消えてしまっていますから上手く行きませんね。 □