

9 2変数関数の極限值 その2

■今日の講義内容

前回の問題の解答

難しい場合の注意

極限值が存在することの示し方

■講義中にやらなければならない事

基本演習 1,2

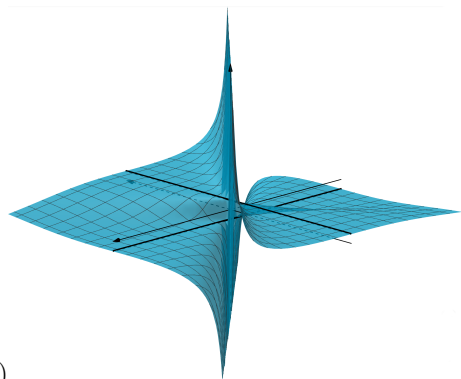
■講義終了後次回までにやらなければならない事

今日の講義全体を振り返り（特に話の流れに留意して）内容を把握し直すこと。

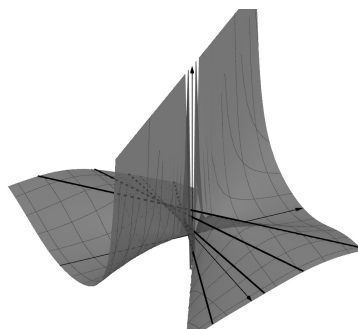
中間試験の再検討

課題第 4 回

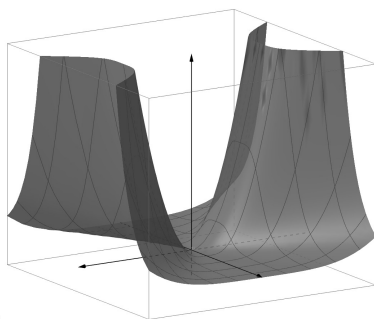
重要事項



(5)



(6)



(3)

事実 9.1 [はさみうちの原理] 3つの関数 $f(x, y), g(x, y), h(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ 以外の点で

$$f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$$

を満たしていて、かつ、

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} h(x, y) = p$$

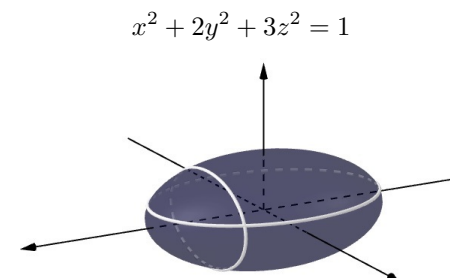
であるとき、 $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g(x, y)$ も存在して $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g(x, y) = p$ です。

問題 9.2 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ を証明して下さい。

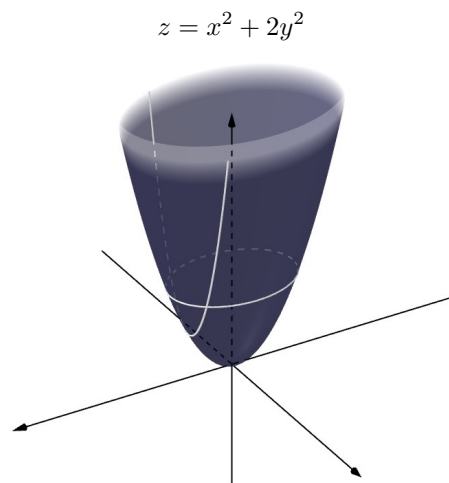
問題 9.3 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \sin \frac{y}{x}$ が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

2変数関数のグラフ

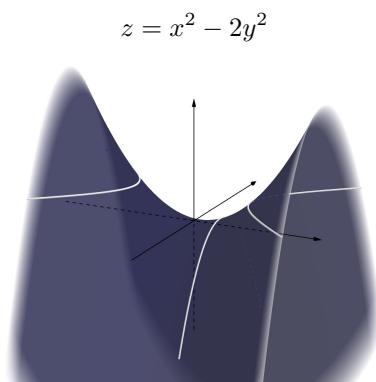
9.0.1 楕円面



9.0.2 楕円放物面



9.0.3 双曲放物面



Exercise

基本演習 1 次の関数の $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ での極限値が 0 であることを証明して下さい。

(1) $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ (2) $\frac{x^3}{x^2 + y^2}$ (7) $x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (3) $\frac{x^4}{x^2 + y^4}$

基本演習 2 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x + y}$ (3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
 (4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ (5) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cos \frac{x}{y}$ (6) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x + y}$
 (7) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ (8) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^{-1}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

発展演習 3 何か 0 に収束しない関数の極限値を、そうとは知らずに 0 に収束するものと勘違いして証明しようとしている状況を考えて下さい。何でも良いので 0 に収束しない極限値に対して今日の極座標を使ったやり方で 0 に収束する事を証明しようとしてみて下さい。もちろん正しく証明する事は出来ませんが、なぜ出来ないのか、どう云う風に困るのかよく見ておいて下さい。

課題

課題 4.1 次の極限値が存在するかどうか調べて下さい：

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - 2y^3}{3x^2 + y^2}$ (2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy - y^4}{x^2 + y^2}$ (3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y \sin y}{(x^2 + y^2)^2}$

提出期限

通常提出期限：6月20日 講義開始時

最終提出期限：6月21日 17時00分00秒