

10 2変数関数の微分

10.1 1変数関数の微分の復習から2変数関数の微分へ

1変数関数の微分は次の様に定義されていました：

定義 10.1 関数 $f(x)$ と点 a （ただし、関数は少なくとも点 a を含むある開区間で定義されているものとします）に対して、次の極限值：

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v) - f(a)}{v - a}$$

が（有限値として）存在するとき、関数 $f(x)$ は点 a において微分可能であると言い、この極限値を $f(x)$ の点 a における微分係数と言って記号 $f'(a)$ で表します。

更に、関数 $f(x)$ がある開区間の各点で微分可能なとき、区間内で上の微分係数によって定義される関数 $f'(x)$ を、関数 $f(x)$ の（この区間における）導関数、あるいは、微分と言います。

2変数の場合には“微分”と云うものはどうやって定義したら良いのでしょうか？

基本演習 1 (1) 2変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で微分可能である事を、あなたならどうやって定義しますか？

(2) その定義に基づいて、関数 $f(x, y) = x^2 + 3xy$ が点 $(1, 1)$ で微分可能かどうか判定して下さい。

(3) 2変数関数の導関数はどう定義したら良いのでしょうか。

(4) その定義に基づくと、2変数関数 $f(x, y) = x^2 + 3xy$ の導関数は存在しますか？ また、存在するならそれはどんな関数ですか？

出来れば『良い』あるいは『面白い』定義であるべきですし、また、ちゃんと定義になっている、即ち、サンプル関数が与えられた時にきちんと計算／判定可能でなければなりません。

10.2 素朴なアイデアとその様々な打開策

10.2.1 素朴なアイデア

一番素直に考えれば、次の様に定義してみたくなる筈です：

$$\lim_{(v,w) \rightarrow (a,b)} \frac{f(v, w) - f(a, b)}{(v, w) - (a, b)}$$

この極限値が存在する時に“微分可能である”とすれば良いのではないのでしょうか。

この定義は1変数の定義をそのまま2変数にした形になっていて、もの凄く素直で良い定義の様に思えるのですが、これではダメである事にすぐに気が付く筈です。

分母は一体なんでしょう？ 百歩譲ってベクトルの引き算だと考えたとしても『ベクトルで割る』なんて云う計算はやった事ありません（聞いた事ありません）。

これを計算可能なものに変えるために、例えば分母のベクトルを、そのベクトルの大きさで置き換えてみると云うアイデアがあります：

$$\lim_{(v,w) \rightarrow (a,b)} \frac{f(v, w) - f(a, b)}{\sqrt{(v-a)^2 + (w-b)^2}}$$

これは要するに1変数で

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v) - f(a)}{|v - a|}$$

とする事に対応しますが、これではまずいですね。これでは分母から『近づく方向』の情報が失われてしまいます。

他にも色々なアイデアを考えた方もいらっしゃるでしょうが、ここで1つ、良く知られているナイスな解決策をご紹介します。

10.2.2 A.-L.Cauchy による複素微分

（実）2次元平面の点 (x, y) と、複素平面の点 $x + iy$ を同一視しましょう。そして複素1変数の関数 $F(x + iy)$ を

$$F(x + iy) = f(x, y)$$

によって定めます。すると、さっき考えた“素朴な”定義式の比は

$$\frac{F(v + iw) - F(a + ib)}{v + iw - (a + ib)}$$

となって、これは複素数の割り算ですからきちんと定義する事が出来ています。これは上手い事を思いつきましたね。

しかし問題点が幾つかあります。

まず第一に、実数値関数なのに微分が複素数になるのはやはりまずいでしょう。分子は実数、分母は複素数ですからね。

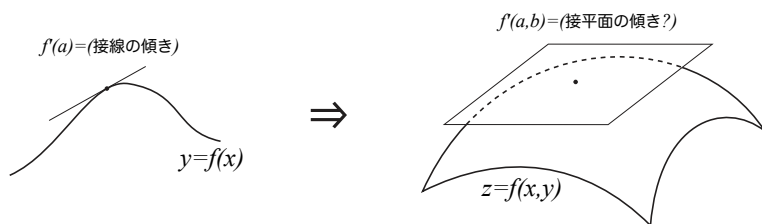
ならばいっその事分子も複素数値関数だと考えれば良いのでしょうか。そうです、これは複素数値関数の微分の定義式になっているのです。これはこれでこの方向で大成功したアイデアでした。

しかし残念ながらこの方法では2変数しか考える事しか出来ません。多変数の関数を扱いたいのはやはりこの世界が3次元+時間1次元であることが大きな理由でしょう。ならば少なくとも3・4変数関数ぐらひは扱える様になりたいわけです。でもこの方式では不可能です（多変数の複素関数の理論もありますが、難しいです）。

更に細かいことを言えば、先週までの極限計算で何となく理解して来た様に、(実) 2次元空間で点のある点に近づけて行く場合、実に様々な近づき方があるため、近づき方によって収束値が違ってしまい、結果的に極限は存在しない事も多々ありました。今の場合なら、微分不可能であると云う事になってしまいます。例えば実数値関数は(複素1変数と考えて) 定数関数以外は全て複素微分不可能になってしまいます。うーむ。

10.2.3 幾何学的なアナロジー

ここで見方をがらっと変えて、図形的に考えてみましょう。なぜなら、1変数関数の微分には、接線の傾きと云う幾何学的な意味があったからです。



図を見て分かる通り、1変数の時の“グラフの接線”に対応するものは、グラフ(=曲面)の接平面です。従ってその“接平面の傾き”をもってして2変数関数の微分とすれば良いのではないのでしょうか？

しかしここでよくよく考えてみると、普通『平面の傾き』とは言いませんね。もちろん平面だって傾いているわけですが、例えば単に『傾き5の平面』などと言っても“どの方向に”傾いているのか分かりませんから意味がありません。

では平面の傾きは どうやって表現したかと言うと、それは所謂法線ベクトルと云う奴です。これはその平面に垂直なベクトルでしたが、この法線ベクトルを2変数関数の微分と考えてみては如何でしょうか。これが図形的に素直なアナロジーになっている様に思います。

ただね～ 関数の微分がベクトル(ベクトル値関数)って云うのはどうもね。2変数関数の微分が1つの2変数関数として求まりはしないのでしょうか？

まあ、そんなわけでして、色々ありますがこの法線ベクトルを2変数関数の微分と考える考え方もあると云う事です。これは gradient と言って(正確にはちょっと違いますが)、もう少し後で学ぶ事になります。

10.2.4 全微分

この辺りをもう少し深く掘ってみましょう。

1変数の微分係数の定義をもう一度良く見ると：

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v) - f(a)}{v - a} = f'(a)$$

ですから、変形すると

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v) - \{f(a) + f'(a)(v - a)\}}{v - a} = 0$$

と書くことが出来ます。これはつまり

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v) - f_1(v)}{v - a} = 0 \quad (10.1)$$

が成り立つような1次関数 $f_1(x)$ が存在すると云う事です。が、極限值が0なので実は

$$\lim_{v \rightarrow a} \left| \frac{f(v) - f_1(v)}{v - a} \right| = \lim_{v \rightarrow a} \frac{|f(v) - f_1(v)|}{|v - a|} = 0 \quad (10.2)$$

としても同じことです。

実は1次関数 $f_1(x) = p(x - a) + q$ が上式(10.2)を満たすならば、

$$0 = \lim_{v \rightarrow a} \left| \frac{f(v) - p(v - a) - q}{v - a} \right|$$

$$= \lim_{v \rightarrow a} \left| \frac{f(v) - q}{v - a} - p \right|$$

$$p = \lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v) - q}{v - a}$$

であり、右辺の極限値が有限値として存在していることから分子も 0 に収束していなければならなくなり、 $f(x)$ が連続関数であることによれば $q = f(a)$ でなければなりません。すると最後の式は

$$p = \lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v) - f(a)}{v - a}$$

であり、定義により $p = f'(a)$ に他なりません。

以上から式 (10.2) を満たす 1 次関数 $f_1(x)$ は $f_1(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ だけであることが分かります。

この事を踏まえて 2 変数の場合を考えると、(10.1) の形では分母をどうするか困りますが、(10.2) の形に変形すれば分母の $|(v, w) - (a, b)|$ はベクトルの大きさと考えられ、

$$\lim_{(v, w) \rightarrow (a, b)} \frac{|f(v, w) - f_1(v, w)|}{\sqrt{(v - a)^2 + (w - b)^2}} = 0$$

となるような “1 次関数” $f_1(x, y)$ の存在を考えると云う事になります。

仮に $f_1(x, y) = p(x - a) + q(y - b) + r$ と置けば、分母の極限値が 0 であることから分子の極限値も 0 でなければならず、従って $f(x, y)$ が連続関数であれば $r = f(a, b)$ でなければなりません。

こうした事情から、

定義 10.2 適当な定数 p, q が存在して

$$\lim_{(v, w) \rightarrow (a, b)} \frac{f(v, w) - f(a, b) - p(v - a) - q(w - b)}{\sqrt{(v - a)^2 + (w - b)^2}} = 0$$

となるとき、 $f(x, y)$ は (a, b) において全微分可能であると言います。

この場合 “微分係数” に相当するものは定数 p, q です。

もしも $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能であるならば、この極限計算において x -軸に平行に近づける場合、つまり、 $w = b, v \rightarrow a$ の場合を考えれば

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v, b) - f(a, b) - p(v - a)}{|v - a|} = 0$$

であり、極限値が 0 なので特に

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v, b) - f(a, b) - p(v - a)}{v - a} = 0$$

であることも分かりますから、

$$\begin{aligned} \frac{f(v, b) - f(a, b)}{v - a} &= \frac{f(v, b) - f(a, b) - p(v - a) + p(v - a)}{v - a} \\ &= \frac{f(v, b) - f(a, b) - p(v - a)}{v - a} + p \rightarrow p \quad (\text{as } v \rightarrow a) \end{aligned}$$

となります：

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v, b) - f(a, b)}{v - a} = p.$$

全く同様に

$$\lim_{w \rightarrow b} \frac{f(a, w) - f(a, b)}{w - b} = q$$

であることも分かります。

10.3 偏微分と云う考え方

もう一度最初の素朴な定義（定義になっていませんが）に戻ってみましょう：

$$\lim_{(v, w) \rightarrow (a, b)} \frac{f(v, w) - f(a, b)}{(v, w) - (a, b)}$$

定義になっていないとかそう云うことは抜きにして、2 変数の極限値としてまず考えたとき、平面内で点のある点に近づけてゆく極限値は近づき方が沢山あり過ぎてむしろ存在しない事も多かったわけです。そのような時に、基本的な考え方として、まずは座標軸に沿った（平行な）近づき方から試してみようと言うスタンスでやって来ました。

そこで上の極限を、まずは x -軸に平行に近づけた場合にどうか考えてみましょう。 (v, w) を (a, b) に x -軸に平行に近づけると、点の y 座標は変化しませんからずっと b のままである筈で、 $(v, b) \rightarrow (a, b)$ すなわち、 y 変数の方は b で固定しておいて x 変数の方だけ変化させて近づけている事になります。とするとこの極限値は

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v, b) - f(a, b)}{v - a}$$

で良いのではないのでしょうか？ これなら分母も実数だし、結局 1 変数の極限値の計算になっていますから、極限値が存在する可能性が高い様に思えます。より多くの関数を『微分可能』の範疇で扱う事が出来る様ではないのでしょうか。

定義 10.3 2変数関数 $f(x, y)$ と点 (a, b) に対して（ただし、関数は少なくともこの点を含む円の内部で定義されているものとします）、次の極限值：

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v, b) - f(a, b)}{v - a}$$

が（有限値として）存在するとき、関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) において x に関して偏微分可能であると言います。

また、関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) において x に関して偏微分可能である時、上記のように存在する極限値を $f(x, y)$ の点 (a, b) における x に関する偏微分係数と言って記号で表します：

$$f_x(a, b), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a, b)}.$$

更に関数 $f(x, y)$ が平面内の領域 D の各点で x に関して偏微分可能であるとき、 D の各点にその点での偏微分係数を対応させて得られる関数を $f(x, y)$ の（ D における） x に関する偏導関数（あるいは偏微分）と言って記号：

$$f_x(x, y), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

で表します。また、 x に関する偏導関数を求める事を単に x で偏微分すると言います。

全く同様に y 軸に平行に近づけた場合も考えます。

定義 10.4 2変数関数 $f(x, y)$ と点 (a, b) に対して（ただし、関数は少なくともこの点を含む円の内部で定義されているものとします）、次の極限值：

$$\lim_{w \rightarrow b} \frac{f(a, w) - f(a, b)}{w - b}$$

が（有限値として）存在するとき、関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) において y に関して偏微分可能であると言います。

また、関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) において y に関して偏微分可能である時、上記のように存在する極限値を $f(x, y)$ の点 (a, b) における y に関する偏微分係数と言って記号で表します：

$$f_y(a, b), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(a, b)}.$$

更に関数 $f(x, y)$ が平面内の領域 D の各点で y に関して偏微分可能であるとき、 D の各点にその点での偏微分係数を対応させて得られる関数を $f(x, y)$ の（ D における） y に関する偏導関数（あるいは偏微分）と言って記号：

$$f_y(x, y), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

で表します。また、 y に関する偏導関数を求める事を単に y で偏微分すると言います。

記号 $f_x(a, b)$ は非常に便利な記法ですが、たとえば具体的な関数 $\log(x^2 + 2xy)$ に対してこの記法を適用しようとするとうまくいかず、どうしたら良いのか分かりません。そうした場合には $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ と云った記法があるわけですが、やはり簡潔な記述をするためには最初に問題の関数に『 $f(x, y) = \log(x^2 + 2xy)$ とおく』などと名前を付けてしまうのが良いように思われます。

10.4 実際の計算

定義を見れば分かる通り、関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) において変数 x に関して偏微分可能である事は、 $f(x, y)$ に $y = b$ を代入して得られる 1 変数関数 $F(x) = f(x, b)$ が $x = a$ において微分可能である事と同値です。

同様に見れば偏微分係数や偏導関数の定義も、同様の 1 変数関数の定義と同じである事が分かります。

事実 10.5 $f(x, y)$ が点 (a, b) において変数 x に関して偏微分可能である事は、 $f(x, y)$ において $y = b$ として得られる 1 変数関数 $f(x, b)$ が点 $x = a$ において微分可能である事と同じ事です。

事実 10.6 $f(x, y)$ の変数 x に関する偏導関数は、 $f(x, y)$ において x 以外の変数（つまり y ）を定数だと考え、従って x の 1 変数関数と思って形式的に x で微分した結果と一致します。

事実 10.7 $f(x, y)$ の点 (a, b) における変数 x に関する偏微分係数は、 $f(x, y)$ において x 以外の変数（つまり y ）を定数だと考え、従って x の 1 変数関数と思って形式的に x で微分し、その後 $(x, y) = (a, b)$ とした結果と一致します。

例えば $f(x, y) = x^2 + 3xy$ なら、 y は定数だと思って $f_x(x, y) = 2x + 3y$ となりますし、一方 y で偏微分する時は x を定数として扱えば良いわけで $f_y(x, y) = 3x$ です。また、単に『偏微分して下さい』と言われたら、それぞれの変数についての偏微分を全て求めて下さい。

基本演習 2 [教 問題 6.4] 次の各関数を偏微分して下さい。

$$(1) z = x^3 - 3xy + y^3 \quad (2) z = \sqrt{x^2 - y^2} \quad (3) z = \frac{3x - 4y}{x + 2y} \quad (5) z = e^{3x} \sin 2y$$

(1)

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = -3x + 3y^2$$

(2)

$$z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad z_y = \frac{-2y}{2\sqrt{x^2 - y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

(3)

$$z_x = \frac{3(x + 2y) - (3x - 4y)}{(x + 2y)^2} = \frac{10y}{(x + 2y)^2}$$

$$z_y = \frac{(-4)(x + 2y) - (3x - 4y)2}{(x + 2y)^2} = -\frac{10x}{(x + 2y)^2}$$

(5)

$$z_x = 3e^{3x} \sin 2y, \quad z_y = 2e^{3x} \cos 2y$$

□

Exercise

基本演習 1 (1) 2 変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で微分可能であることを、あなたならどうやって定義しますか？

(2) その定義に基づいて、関数 $f(x, y) = x^2 + 3xy$ が点 $(1, 1)$ で微分可能かどうか判定して下さい。

(3) 2 変数関数の導関数はどう定義したら良いでしょうか。

(4) その定義に基づくと、2 変数関数 $f(x, y) = x^2 + 3xy$ の導関数は存在しますか？ また、存在するならそれはどんな関数ですか？

基本演習 2 [教 問題 6.4] 次の各関数を偏微分して下さい。

$$(1) z = x^3 - 3xy + y^3 \quad (2) z = \sqrt{x^2 - y^2} \quad (3) z = \frac{3x - 4y}{x + 2y}$$

$$(4) z = x \log \frac{y}{x} \quad (5) z = e^{3x} \sin 2y \quad (6) z = \sin^{-1} \frac{x}{y} \quad (y > 0)$$

基本演習 3 [教 練習問題 6.1] 次の各関数を偏微分して下さい。

$$(1) z = \frac{x - y}{x + y} \quad (2) z = xy\sqrt{x^2 - y^2} \quad (3) z = \frac{e^x}{x^2 + y^2} \quad (4) z = \log_y x$$

基本演習 4 [教 練習問題 6.2] 次の各関数の偏導関数を求めて下さい。

$$(1) z = (x + y^2)^3 \quad (2) z = x \log(x^2 + y^2)$$

発展演習 5 (1) 次の関数の偏導関数を求めて下さい。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(2) $f(x, y)$ の $(0, 0)$ での連続性を調べて下さい。