10　２変数関数の微分

Exercise 解答例

基本演習 2

(1)

$$z_x = 3x^2 - 3y, \qquad z_y = -3x + 3y^2$$

(2)

$$z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}, \quad z_y = \frac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

(3)

$$z_x = \frac{3(x+2y)-(3x-4y)}{(x+2y)^2} = \frac{10y}{(x+2y)^2}$$
$$z_y = \frac{(-4)(x+2y)-(3x-4y)2}{(x+2y)^2} = -\frac{10x}{(x+2y)^2}$$

(4) これは変形してから偏微分した方が良いかも知れません：

$$z = x\log\frac{y}{x} = x\log y - x\log x$$
$$z_x = \log y - \log x - 1 = \log\frac{y}{x} - 1$$
$$z_y = \frac{x}{y}.$$

(5)

$$z_x = 3\mathrm{e}^{3x}\sin 2y, \quad z_y = 2\mathrm{e}^{3x}\cos 2y$$

(6) これは逆三角関数の導関数を知らないと苦労するかも知れませんね。

$$\left(\mathrm{Sin}^{-1}t\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

上の結果を流用すれば、$y > 0$ に注意して

$$z_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

ですか。

もし逆三角関数の微分を忘れてしまったら、直接計算するしかありません。z_y はそう云った状況を想定して計算してみましょう。

$$z = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{y}$$

において、両辺の sine をとれば、逆関数の定義から $\sin z = \frac{x}{y}$ ですので、この両辺を y で偏微分して

$$\cos z \cdot z_y = -\frac{x}{y^2}$$
$$z_y = -\frac{x}{y^2\cos z} = -\frac{x}{y^2\cos\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{y}}$$

です。ここで、

$$\left(\cos\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\sin\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{y}\right)^2 = 1$$
$$\left(\cos\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1$$
$$\left(\cos\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{y}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

ですが、逆三角関数の定義によれば $-\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{y} \leq \frac{\pi}{2}$ なので、この範囲では cosine は非負であって

$$\cos\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{y} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

が分かります。従って

$$z_y = -\frac{x}{y^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = -\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

が得られます（再び $y > 0$ に注意）。 □

基本演習 3

(1)

$$z_x = \frac{1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2},$$
$$z_y = \frac{(-1)(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} = -\frac{2x}{(x+y)^2}.$$

(2)

$$z_x = y\sqrt{x^2-y^2} + xy\frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}2x = y\sqrt{x^2-y^2} + \frac{x^2y}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{2x^2y-y^3}{\sqrt{x^2-y^2}},$$
$$z_y = x\sqrt{x^2-y^2} + xy\frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y) = x\sqrt{x^2-y^2} - \frac{xy^2}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x^3-2xy^2}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

(3)

$$z_x = \frac{\mathrm{e}^x(x^2+y^2)-\mathrm{e}^x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$z_y = -\frac{2y\mathrm{e}^x}{(x^2+y^2)^2}.$$

(4)

$$z = \log_y x = \frac{\log x}{\log y},$$
$$z_x = \frac{1}{x\log y},$$
$$z_y = -\frac{\log x}{y(\log y)^2}.$$

□

基本演習 4

(1)

$$z_x = 3(x+y^2)^2,$$
$$z_y = 3(x+y^2)^2(2y) = 6y(x+y^2)^2$$

(2)

$$z_x = \log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2},$$
$$z_y = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

□

発展演習 5

原点以外での偏導関数はそのまま分数関数の微分をすればよいでしょう。$(x,y)\neq(0,0)$ の場合、

$$f_x(x,y) = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2},\quad f_y(x,y) = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

となります。また、原点での偏微分係数は、その定義により、

$$\lim_{v\to 0}\frac{f(v,0)-f(0,0)}{v-0} = \lim_{v\to 0}\frac{0-0}{v} = 0,\quad \lim_{w\to 0}\frac{f(0,w)-f(0,0)}{w-0} = \lim_{w\to 0}\frac{0-0}{w} = 0$$

から、

$$f_x(0,0) = 0,\quad f_y(0,0) = 0$$

が分かります。 □

実は既に $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ が存在しないことを見ましたから、この関数は原点で連続ではありません。つまり、偏微分可能であるからと言って連続であるとは限らないと云うことが分かります。ふつうの感覚では微分可能であるならば連続であって然るべきですが、偏微分と云うものはやはり２変数の『微分そのもの』ではありません。あくまで座標軸に平行に近づけた場合しか見ていないのでこのようなことが起きます。 □