10 2変数関数の微分

■今日の講義内容

2変数関数の微分を如何にして定義するか

幾つかの知恵

偏微分という考え方

■講義中にやらなければならない事

基本演習 1、2

■講義終了後次回までにやらなければならない事

今日の講義全体を振り返り（特に話の流れに留意して）内容を把握し直すこと。

基本演習 3、4

重要事項

定義 10.1 関数 $f(x)$ と点 a （ただし、関数は少なくとも点 a を含むある開区間で定義されているものとします）に対して、次の極限值：

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v) - f(a)}{v - a}$$

が（有限値として）存在するとき、関数 $f(x)$ は点 a において微分可能であると言います、この極限值を $f(x)$ の点 a における微分係数と言って記号 $f'(a)$ で表します。

更に、関数 $f(x)$ がある開区間の各点で微分可能なとき、区間内で上の微分係数によって定義される関数 $f'(x)$ を、関数 $f(x)$ の（この区間における）導関数、あるいは、微分と言います。

定義 10.2 2変数関数 $f(x, y)$ と点 (a, b) に対して（ただし、関数は少なくともこの点を含む円の内部で定義されているものとします）、次の極限值：

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v, b) - f(a, b)}{v - a}$$

が（有限値として）存在するとき、関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) において x に関して偏微分可能であると言います。

また、関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) において x に関して偏微分可能である時、上記のように存在する極限值を $f(x, y)$ の点 (a, b) における x に関する偏微分係数と言って記号で表します：

$$f_x(a, b), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a, b)}.$$

更に関数 $f(x, y)$ が平面内の領域 D の各点で x に関して偏微分可能であるとき、 D の各点にその点での偏微分係数を対応させて得られる関数を $f(x, y)$ の（ D における） x に関する偏導関数（あるいは偏微分）と言って記号：

$$f_x(x, y), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

で表します。また、 x に関する偏導関数を求める事を単に x で偏微分すると言います。

定義 10.3 2変数関数 $f(x, y)$ と点 (a, b) に対して（ただし、関数は少なくともこの点を含む円の内部で定義されているものとします）、次の極限值：

$$\lim_{w \rightarrow b} \frac{f(a, w) - f(a, b)}{w - b}$$

が（有限値として）存在するとき、関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) において y に関して偏微分可能であると言います。

また、関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) において y に関して偏微分可能である時、上記のように存在する極限值を $f(x, y)$ の点 (a, b) における y に関する偏微分係数と言って記号で表します：

$$f_y(a, b), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(a, b)}.$$

更に関数 $f(x, y)$ が平面内の領域 D の各点で y に関して偏微分可能であるとき、 D の各点にその点での偏微分係数を対応させて得られる関数を $f(x, y)$ の（ D における） y に関する偏導関数（あるいは偏微分）と言って記号：

$$f_y(x, y), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

で表します。また、 y に関する偏導関数を求める事を単に y で偏微分すると言います。

事実 10.4 $f(x, y)$ が点 (a, b) において変数 x に関して偏微分可能である事は、 $f(x, y)$ において $y = b$ として得られる 1 変数関数 $f(x, b)$ が点 $x = a$ において微分可能である事と同じ事です。

事実 10.5 $f(x, y)$ の変数 x に関する偏導関数は、 $f(x, y)$ において x 以外の変数 (つまり y) を定数だと考え、従って x の 1 変数関数と思って形式的に x で微分した結果と一致します。

事実 10.6 $f(x, y)$ の点 (a, b) における変数 x に関する偏微分係数は、 $f(x, y)$ において x 以外の変数 (つまり y) を定数だと考え、従って x の 1 変数関数と思って形式的に x で微分し、その後 $(x, y) = (a, b)$ とした結果と一致します。

Exercise

基本演習 1 (1) 2 変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で微分可能であることを、あなたならどうやって定義しますか？

(2) その定義に基づいて、関数 $f(x, y) = x^2 + 3xy$ が点 $(1, 1)$ で微分可能かどうか判定して下さい。

(3) 2 変数関数の導関数はどう定義したら良いでしょうか。

(4) その定義に基づくと、2 変数関数 $f(x, y) = x^2 + 3xy$ の導関数は存在しますか？ また、存在するならばそれはどんな関数ですか？

基本演習 2 [教 問題 6.4] 次の各関数を偏微分して下さい。

$$(1) z = x^3 - 3xy + y^3 \quad (2) z = \sqrt{x^2 - y^2} \quad (3) z = \frac{3x - 4y}{x + 2y}$$

$$(4) z = x \log \frac{y}{x} \quad (5) z = e^{3x} \sin 2y \quad (6) z = \text{Sin}^{-1} \frac{x}{y} \quad (y > 0)$$

基本演習 3 [教 練習問題 6,1] 次の各関数を偏微分して下さい。

$$(1) z = \frac{x - y}{x + y} \quad (2) z = xy\sqrt{x^2 - y^2} \quad (3) z = \frac{e^x}{x^2 + y^2} \quad (4) z = \log_y x$$

基本演習 4 [教 練習問題 6,2] 次の各関数の偏導関数を求めて下さい。

$$(1) z = (x + y^2)^3 \quad (2) z = x \log(x^2 + y^2)$$

発展演習 5 (1) 次の関数の偏導関数を求めて下さい。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(2) $f(x, y)$ の $(0, 0)$ での連続性を調べて下さい。