

11 偏微分

11.1 偏微分の定義

2変数の極限値は、近づき方が沢山あり過ぎてむしろ存在しない事も多く、まずは座標軸に平行な近づき方から試してみようと言うスタンスでやって来ました。

$$\lim_{(v,w) \rightarrow (a,b)} \frac{f(v,w) - f(a,b)}{(v,w) - (a,b)}$$

そこで上の極限を、まずは x -軸に平行に近づけた場合にどうか考えてみましょう。この場合 y 座標は変化しませんからずっと b のままである筈で、 $(v,b) \rightarrow (a,b)$ のように x 変数の方だけ変化させて近づけている事になります。とするとこの極限値は

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v,b) - f(a,b)}{v - a}$$

で良いのではないのでしょうか？ これが偏微分の考え方です。

定義 11.1 2変数関数 $f(x,y)$ と点 (a,b) に対して次の極限値が存在するとき：

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v,b) - f(a,b)}{v - a}$$

$f(x,y)$ は点 (a,b) において x に関して偏微分可能であると言います。

また、 $f(x,y)$ が点 (a,b) において x に関して偏微分可能である時、上記のように存在する極限値を $f(x,y)$ の点 (a,b) における x に関する偏微分係数と言って以下の記号で表します：

$$f_x(a,b), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad \left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right|_{(a,b)}.$$

更に関数 $f(x,y)$ が平面内の領域 D の各点で x に関して偏微分可能であるとき、 D の各点にその点での偏微分係数を対応させて得られる関数を $f(x,y)$ の (D における) x に関する偏導関数 (あるいは偏微分) と言って記号：

$$f_x(x,y), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

で表します。また、 x に関する偏導関数を求める事を単に x で偏微分すると言います。

全く同様に y 軸に平行に近づけた場合も考えます。

定義 11.2 2変数関数 $f(x,y)$ と点 (a,b) に対して次の極限値が存在するとき：

$$\lim_{w \rightarrow b} \frac{f(a,w) - f(a,b)}{w - b}$$

$f(x,y)$ は点 (a,b) において y に関して偏微分可能であると言います。

また、 $f(x,y)$ が点 (a,b) において y に関して偏微分可能である時、上記のように存在する極限値を $f(x,y)$ の点 (a,b) における y に関する偏微分係数と言って以下の記号で表します：

$$f_y(a,b), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), \quad \left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right|_{(a,b)}.$$

更に関数 $f(x,y)$ が平面内の領域 D の各点で y に関して偏微分可能であるとき、 D の各点にその点での偏微分係数を対応させて得られる関数を $f(x,y)$ の (D における) y に関する偏導関数 (あるいは偏微分) と言って記号：

$$f_y(x,y), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

で表します。また、 y に関する偏導関数を求める事を単に y で偏微分すると言います。

11.2 実際の計算

事実 11.3 $f(x,y)$ が点 (a,b) において変数 x に関して偏微分可能である事は、 $f(x,y)$ において $y = b$ として得られる 1 変数関数 $f(x,b)$ が点 $x = a$ において微分可能である事と同じ事です。

$f(x,y)$ の変数 x に関する偏導関数は、 $f(x,y)$ において x 以外の変数 (つまり y) を定数だと考え、従って x の 1 変数関数と思って形式的に x で微分した結果と一致します。

基本演習 1 次の関数の偏導関数を求めて下さい。

$$\begin{aligned} (1) f(x, y) &= x^2y & (2) f(x, y) &= x^2 + 2xy \\ (3) f(x, y) &= \frac{x-3y}{2x+y} & (4) f(x, y) &= (2x-3y)^3 \end{aligned}$$

一方、こんな風に定義された関数の場合はどうしたら良いでしょうか：

例題 11.4 次の関数の偏導関数を求めて下さい。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

原点以外での偏導関数はそのまま分数関数の微分をすればよいでしょう。 $(x, y) \neq (0, 0)$ の場合、

$$f_x(x, y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

となります。また、原点での偏微分係数は、その定義により、

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(v, 0) - f(0, 0)}{v - 0} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{v} = 0, \quad \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(0, w) - f(0, 0)}{w - 0} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{w} = 0$$

から、

$$f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0$$

が分かります。

□

実は既に $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ が存在しないことを見ましたから、この関数は原点で連続ではありません。つまり、偏微分可能であるからと言って連続であるとは限らないと云うことが分かります。ふつうの感覚では微分可能であるならば連続であって然るべきですが、偏微分と云うものはやはり 2 変数の『微分そのもの』ではありません。あくまで座標軸に平行に近づけた場合しか見ていないのでこのようなことが起きます。

11.3 高階の偏導関数

2 変数関数を偏微分した結果もまた 2 変数関数になっていますから、これを更にもう一度偏微分すると云う事も考えられます。いや、一度なんてけちくさい事は言わず何度でも可能な限り偏微分していい筈です。

そのようにして（もし可能なら、ですが）得られる高階の偏導関数は、普通に考えれば $(f_x)_x, (f_y)_x$ の様に書き表されるわけですが、いちいち括弧をつけるのも面倒ですから括弧を外して f_{xx}, f_{yx} の様に書きます。偏微分を示す添字の順序に注意して下さい。関数 f の近くにある方が先ですよ。 f_{xy} と書いたらまず x で偏微分して、更にもう一度今度は y で偏微分すると云う意味です。この様に、一般に 2 変数関数の 2 階（2 次）の偏導関数は $f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y), f_{yy}(x, y)$ の 4 種類あります。

別の記法では

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y^2}$$

などとも書きますが、この場合も関数に近い方が先です。従って後者はまず y で偏微分して次に x で偏微分すると云う事を示しています。

基本演習 2 [教 問題 6.5] 次の各関数の第 2 次偏導関数を求めて下さい。

$$(1) z = x^3 - 3xy + y^3 \quad (2) z = e^{3x} \sin 2y$$

(1)

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -3, \quad f_{yx} = -3, \quad f_{yy} = 6y$$

(2)

$$z_{xx} = 9e^{3x} \sin 2y, \quad z_{xy} = 6e^{3x} \cos 2y, \quad z_{yx} = 6e^{3x} \cos 2y, \quad z_{yy} = -4e^{3x} \sin 2y$$

□

11.4 偏微分の順序に関する注意

今計算した関数ではいずれも $z_{xy} = z_{yx}$ が成り立っていますが、これはいつもそうなのでしょうか。

11.4.1 偏微分の順序によらないケース

実は f_{xy}, f_{yx} が存在して連続関数であるならばこれらは等しい事が知られています。そして多くの関数はその条件を満たしており、結果的に言えば先ほど言った様な偏微分の順番に関する複雑さは実は気にしないで良い事が分かります。

従って特に注意がない場合は f_{xy} と f_{yx} は等しいものと考えて計算して頂いて構いません。

11.4.2 偏微分の順序によって結果が違えるケース

発展演習 5 次の様に定義された関数について以下の問いに答えて下さい：

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (1) 任意の点で偏微分可能であることを示し、偏導関数を求めて下さい。
- (2) 2 階の各種偏微分は可能でしょうか？ 特に f_{xy} と f_{yx} について調べて下さい。

【連続性】原点以外での連続性は明らかですが、原点でも、次の評価から

$$\left| xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |xy| \rightarrow 0 \quad (\text{as } (x, y) \rightarrow (0, 0))$$

と分かってこの関数は原点でも連続であることが分かります。

【偏微分】原点以外での偏微分可能性は明らかで、各偏導関数は

$$f_x(x, y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y(x, y) = -\frac{y^4x + 4y^2x^3 - x^5}{(y^2 + x^2)^2}$$

となります。

一方、次のように $f(x, y)$ は原点において x, y それぞれについて偏微分可能で

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \frac{0 - 0}{x} = 0 \rightarrow 0, \quad \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \frac{0 - 0}{y} = 0 \rightarrow 0$$

偏微分係数は共に 0 です。以上から、

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} -\frac{y^4x + 4y^2x^3 - x^5}{(y^2 + x^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

です。

【2 階偏微分】さっきと同様な評価によればこの各偏導関数も原点を含めて連続関数になっています：

$$|f_x(x, y)| = \left| \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \frac{r^5 |\cos^4 \theta \sin \theta + 4 \cos^2 \theta \sin^3 \theta - \sin^5 \theta|}{r^4} \leq 6r \rightarrow 0.$$

更なる偏微分可能性も原点以外では明らかです。4 種類全てやっていたのでは大変です。4 種類全てやっていたのでは大変です。すから f_{xy} と f_{yx} にしぼって見てみましょう。

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2 + y^2)^2 - (x^4y + 4x^2y^3 - y^5)2(x^2 + y^2)(2y)}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2 + y^2) - (x^4y + 4x^2y^3 - y^5)(4y)}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{x^6 + 12x^4y^2 - 5x^2y^4 + x^4y^2 + 12x^2y^4 - 5y^6 - 4x^4y^2 - 16x^2y^4 + 4y^6}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} \\ f_{yx}(x, y) &= \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

(ここも、 f_x で x と y を入れ替えて -1 を掛けると f_y になる事を使って考えればすぐに分かる筈です) この様に、原点以外の場所では確かに $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ が成り立っていますね。

そこで原点での偏微分可能性を調べてみると、

$$\frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} = \frac{\frac{-y^5}{y^4} - 0}{y} = -1, \quad \frac{f_y(x, 0) - f_y(x, 0)}{x} = \frac{\frac{x^5}{x^4} - 0}{x} = 1$$

から、 $f_x(x, y)$ は y に関して偏微分可能であり、偏微分係数は $f_{xy}(0, 0) = -1$ 、 $f_y(x, y)$ は x に関して偏微分可能であり、偏微分係数は $f_{yx}(0, 0) = 1$ であることが分かります。これは何を意味するのでしょうか？

はっきりと書けば、2階の偏導関数は

$$f_{xy}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ -1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_{yx}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ですから、これら2つの関数は原点での値が違います。従ってこれらは違う関数だと云う事になります。

さっき言った様に、もしもこれらが連続関数だったならば2つは一致している筈ですから、要するにこれらは連続関数ではないと云う事です。

実際、今日やって来た様な評価をしようとしても、次数から言って分子・分母共に6次で釣り合っていてしまっていますね。これでは上手く行きません。分子の r が余ったからこそ0に収束するもので評価出来たわけです。

また極限値を計算してみると、 x -軸に沿って近づけると1 (x -軸上では関数は一定値1です)、 y -軸に沿えば極限値は-1になってしまい (y -軸上では関数は一定値-1です)、極限値 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}$ は存在しません。存在しないからにはそこで1と定義しようと-1と定義しようとこれは連続関数にはなり得ません。

この様に、一般には $f_{xy} \neq f_{yx}$ となる事もありますので高度なレベルで数学を学んで行く覚悟がある場合には細心の注意が必要ですが、皆さんが遭遇するほとんど全ての関数はこのような特殊な関数ではなく、2階の偏導関数も連続関数になっていて $f_{xy} = f_{yx}$ となっていますから、それほどビビる必要はありません。

Exercise

基本演習 1 次の関数の偏導関数を求めて下さい。

$$(1) f(x, y) = x^2y \quad (2) f(x, y) = x^2 + 2xy$$

$$(3) f(x, y) = \frac{x - 3y}{2x + y} \quad (4) f(x, y) = (2x - 3y)^3$$

基本演習 2 [教 問題 6.5] 次の各関数の第2次偏導関数を求めて下さい。

$$(1) z = x^3 - 3xy + y^3 \quad (2) z = e^{3x} \sin 2y$$

基本演習 3 [教 問題 6.5] 次の各関数の第2次偏導関数を求めて下さい。

$$(3) z = x \log \frac{y}{x} \quad (4) z = \sin^{-1} \frac{x}{y} \quad (y > 0)$$

基本演習 4 [教 練習問題 6.2] 次の各関数の第2次までの偏導関数を求めて下さい。

$$(1) z = (x + y^2)^3 \quad (2) z = x \log(x^2 + y^2)$$

発展演習 5 次の様に定義された関数について以下の問いに答えて下さい：

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (1) 任意の点で偏微分可能であることを示し、偏導関数を求めて下さい。
- (2) 2階の各種偏微分は可能でしょうか？ 特に f_{xy} と f_{yx} について調べて下さい。