

11 偏微分

■今日の講義内容

偏微分の定義
偏微分の計算練習
高階の偏微分

■講義中にやらなければならない事

基本演習 1、2

■講義終了後次回までにやらなければならない事

今日の講義全体を振り返り（特に話の流れに留意して）内容を把握し直すこと。
基本演習 3、4

重要事項

■定義

定義 11.1 2 変数関数 $f(x, y)$ と点 (a, b) に対して次の極限値が存在するとき：

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v, b) - f(a, b)}{v - a}$$

$f(x, y)$ は点 (a, b) において x に関して偏微分可能であると言います。

また、 $f(x, y)$ が点 (a, b) において x に関して偏微分可能である時、上記のように存在する極限値を $f(x, y)$ の点 (a, b) における x に関する偏微分係数と言って以下の記号で表します：

$$f_x(a, b), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a, b)}.$$

更に関数 $f(x, y)$ が平面内の領域 D の各点で x に関して偏微分可能であるとき、 D の各点にその点での偏微分係数を対応させて得られる関数を $f(x, y)$ の（ D における） x に関する偏導関数（あるいは偏微分）と言って記号：

$$f_x(x, y), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

で表します。また、 x に関する偏導関数を求める事を単に x で偏微分すると言います。

定義 11.2 2 変数関数 $f(x, y)$ と点 (a, b) に対して次の極限値が存在するとき：

$$\lim_{w \rightarrow b} \frac{f(a, w) - f(a, b)}{w - b}$$

$f(x, y)$ は点 (a, b) において y に関して偏微分可能であると言います。

また、 $f(x, y)$ が点 (a, b) において y に関して偏微分可能である時、上記のように存在する極限値を $f(x, y)$ の点 (a, b) における y に関する偏微分係数と言って以下の記号で表します：

$$f_y(a, b), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(a, b)}.$$

更に関数 $f(x, y)$ が平面内の領域 D の各点で y に関して偏微分可能であるとき、 D の各点にその点での偏微分係数を対応させて得られる関数を $f(x, y)$ の（ D における） y に関する偏導関数（あるいは偏微分）と言って記号：

$$f_y(x, y), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

で表します。また、 y に関する偏導関数を求める事を単に y で偏微分すると言います。

■計算方法

事実 11.3 $f(x, y)$ が点 (a, b) において変数 x に関して偏微分可能である事は、 $f(x, y)$ において $y = b$ として得られる 1 変数関数 $f(x, b)$ が点 $x = a$ において微分可能である事と同じ事です。

$f(x, y)$ の変数 x に関する偏導関数は、 $f(x, y)$ において x 以外の変数（つまり y ）を定数だと考え、従って x の 1 変数関数と思って形式的に x で微分した結果と一致します。

■高階の偏導関数

一般に 2 変数関数の 2 階 (2 次) の偏導関数は $f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y), f_{yy}(x, y)$ の 4 種類あります。

別の記法では

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y), \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)$$

などとも書きますが、この場合も関数に近い方が先です。従って後者はまず y で偏微分して次に x で偏微分すると云う事を示しています。

実は f_{xy}, f_{yx} が存在して連続関数であるならばこれらは等しい事が知られています。そして多くの関数はその条件を満たしており、結果的に、特に注意がない場合は f_{xy} と f_{yx} は等しいものと考えて計算して頂いて構いません。

Exercise

基本演習 1 次の関数の偏導関数を求めて下さい。

$$(1) f(x, y) = x^2 y \quad (2) f(x, y) = x^2 + 2xy$$

$$(3) f(x, y) = \frac{x - 3y}{2x + y} \quad (4) f(x, y) = (2x - 3y)^3$$

基本演習 2 [教 問題 6.5] 次の各関数の第 2 次偏導関数を求めて下さい。

$$(1) z = x^3 - 3xy + y^3 \quad (2) z = e^{3x} \sin 2y$$

基本演習 3 [教 問題 6.5] 次の各関数の第 2 次偏導関数を求めて下さい。

$$(3) z = x \log \frac{y}{x} \quad (4) z = \sin^{-1} \frac{x}{y} \quad (y > 0)$$

基本演習 4 [教 練習問題 6,2] 次の各関数の第 2 次までの偏導関数を求めて下さい。

$$(1) z = (x + y^2)^3 \quad (2) z = x \log(x^2 + y^2)$$

発展演習 5 次の様に定義された関数について以下の問いに答えて下さい：

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(1) 任意の点で偏微分可能であることを示し、偏導関数を求めて下さい。

(2) 2 階の各種偏微分は可能でしょうか？ 特に f_{xy} と f_{yx} について調べて下さい。