12　合成関数の偏導関数

12.1　関数の合成とその微分

２変数関数 $f(x,y)$ と２つの１変数関数 $g(t), h(t)$ があった時に、$x = g(t), y = h(t)$ と云う関係式を接着剤にして新しい関数 $k(t)$ を次の様に作る事が出来ます（$(g(t),h(t))$ が f の定義域に入る様な t の範囲に限る）：

$$f(x,y) \quad \overset{\left\{\substack{x=g(t)\\ y=h(t)}\right.}{+} \quad \begin{cases} g(t) \\ h(t) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad k(t) = f(g(t),h(t)).$$

このとき f,g,h が（偏）微分可能であったなら k も微分可能になる様に思われます。

$$\begin{aligned}\frac{k(t+p)-k(t)}{p} &= \frac{f(g(t+p),h(t+p)) - f(g(t),h(t))}{p} \\ &= \frac{f(g(t+p),h(t+p)) - f(g(t),h(t+p))}{p} \\ &\qquad + \frac{f(g(t),h(t+p)) - f(g(t),h(t))}{p} \\ &= \frac{f(g(t+p),h(t+p)) - f(g(t),h(t+p))}{g(t+p)-g(t)} \cdot \frac{g(t+p)-g(t)}{p} \\ &\qquad + \frac{f(g(t),h(t+p)) - f(g(t),h(t))}{h(t+p)-h(t)} \cdot \frac{h(t+p)-h(t)}{p}\end{aligned}$$

となりますが、平均値の定理によれば

$$= f_x(c,h(t+p))\frac{g(t+p)-g(t)}{p} + f_y(g(t),d)\frac{h(t+p)-h(t)}{p}$$

となる様な c が $g(t)$ と $g(t+p)$ の間に、d が $h(t)$ と $h(t+p)$ の間にそれぞれ存在します。従って、g,h が微分可能、f が偏微分可能であって、更に f_x, f_y が連続関数であるならばここで $p \to 0$ の極限をとれば

$$\to f_x(g(t),h(t))g'(t) + f_y(g(t),h(t))h'(t)$$

が成り立つ事が分かります。従って

$$k'(t) = f_x(g(t),h(t))g'(t) + f_y(g(t),h(t))h'(t)$$

となりますが、直観的に言って“$f = k, x = g, y = h$”なわけですから

$$f'(t) = f_x(x(t),y(t))x'(t) + f_y(x(t),y(t))y'(t)$$

と書いても悪くないでしょう。ただし、f は本来２変数関数ですからやっぱり $f'(t)$ は正確には正しくありません。そこら辺きちんと理解出来てるならこうした書き方をしても悪くはないと言うことです。

事実 12.1 g,h が微分可能、f が偏微分可能であって、更に f_x, f_y が連続関数であるならば、合成 $k(t) = f(g(t),h(t))$ が定義できる範囲において

$$\begin{aligned}k'(t) &= f_x(g(t),h(t))g'(t) + f_y(g(t),h(t))h'(t) \\ f'(t) &= f_x(x(t),y(t))x'(t) + f_y(x(t),y(t))y'(t)\end{aligned}$$

あるいは以下のようにも書きます：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(t),h(t))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t),h(t))\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

12.2　具体的な計算例

問題 12.2 つぎの各関数に関して合成関数 $F(t) = f(g(t),h(t))$ の微分を計算して下さい。

$$f(x,y) = x^2 - y^2, \quad g(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}, \quad h(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}$$

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = -2y, \quad g'(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}, \quad h'(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}$$

ですから

$$F'(t) = 2x(t)(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}) - 2y(t)(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) = 2(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}) - 2(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}) = 0$$

と云う風に計算する事が出来ますが、もちろんこのような具体的な場合にはそんな事をしなくても実際に合成した関数がどうなるのかを書き下してやって：

$$F(t) = (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2 - (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})^2 = 4$$

その１変数関数を普通に微分すればオッケーです（そりゃあ 0 になりますわね）。

12.3　２変数の合成関数

２変数関数 $f(x,y), g(v,w), h(v,w)$ があった時に、$x = g(v,w), y = h(v,w)$ と云う関係式を使って新しい関数 $k(v,w)$ を次の様に作る事が出来ます：

$$f(x,y) \quad \overset{\begin{cases} x=g(v,w) \\ y=h(v,w)\end{cases}}{+} \quad \begin{cases} g(v,w) \\ h(v,w) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad k(v,w) = f(g(v,w), h(v,w)).$$

さっきは中に入れる方の関数が１変数でしたが今回は２変数です。しかし、どうせ偏微分するとき一方の変数は定数だと思ってあたかも１変数関数であるかの様に扱って微分するので、中に入れるものが２変数になったところで特に何も変わりません。

つまり、$k(v,w)$ を v で偏微分する時は、２変数関数 $f(x,y)$ と“１変数関数”$x = g(v,w), y = h(v,w)$（w は定数だと思っています）を合成した関数の v に関する“普通の”微分ですから、さっきと同様に計算されます。

事実 12.3 f,g,h が偏微分可能であって、更に f_x, f_y が連続関数であるならば、合成 $k(v,w) = f(g(v,w),h(v,w))$ が定義できる範囲において（$k = f, g = x, h = y$ などと同一視します）

$$k_v(v,w) = f_x(g(v,w),h(v,w))g_v(v,w) + f_y(g(v,w),h(v,w))h_v(v,w)$$
$$f_v = f_x x_v + f_y y_v$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$k_w(v,w) = f_x(g(v,w),h(v,w))g_w(v,w) + f_y(g(v,w),h(v,w))h_w(v,w)$$
$$f_w = f_x x_w + f_y y_w$$
$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}$$

もちろん、具体的な計算においては、まず合成を実行して v, w の関数として書き下してからそれを実際に偏微分すれば良いでしょう。

問題 12.4 $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2,\ x = u + v,\ y = uv$ とするとき、f_u, f_v を求めてください。

$$f_u = f_x x_u + f_y y_u = 4x \cdot 1 + 6y \cdot v = 4(u+v) + 6uv^2$$
$$f_v = f_x x_v + f_y y_v = 4x \cdot 1 + 6y \cdot u = 4(u+v) + 6u^2 v$$

あるいは、$f(x,y) = 2(u+v)^2 + 3u^2v^2$ と計算した上で

$$f_u = 4(u+v) + 6uv^2, \quad f_v = 4(u+v) + 6uv^2$$

です。 □

問題 12.5 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とするとき、２変数関数 $f(x,y)$ を r,θ の関数と見て、偏微分を計算してください。

２変数関数 $f(x,y)$ を、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ によって r,θ の関数と見ると

$$f_r = f_x x_r + f_y y_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$$
$$f_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta = -f_x r\sin\theta + f_y r\cos\theta$$

なので、特に

$$(f_r)^2 + \frac{1}{r^2}(f_\theta)^2 = (f_x)^2 + (f_y)^2$$

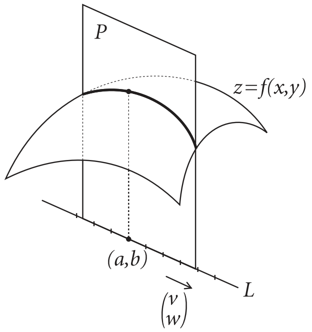
が成り立っています。 □

12.4　方向微分

xy-平面の（もちろん関数の定義域内の）点 (a,b) とこの点を通る直線 L を考えます。直線 L の方向ヴェクターを $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ としてパラメータ表示しておきます：

$$L: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

２変数関数 $f(x,y)$ をこの直線 L の上だけで見るとどうなっているか調べてみましょう。



これは即ち直線 L を含み xy-平面に垂直な平面 P で $z=f(x,y)$ のグラフ（曲面です）を切った時の切り口の曲線がグラフになっていますね（左図)。

しかし、直線 L はただの直線ですから座標軸ではありません。従って"目盛"も付いていません。そこでこの直線に目盛を打って（座標軸と考えて）本当にこの直線上の関数と考えられる様にするにはどうしたら良いでしょうか。

要するにどんな目盛の付け方をすれば良いのかと云う事ですが、どんな風に目盛を打ってもグラフの高さを変えているわけではありませんから、やはり目盛の間隔は x-軸の目盛の間隔と同じ１にしなければなりません。

もし間隔２で目盛を打ってしまったら、底辺と高さの縮尺が変化する事になってしまい、おかしな事になってしまいます（直線 L がたまたま x-軸だった場合を考えてみれば良いでしょう)。

それを実行するにはどうしたら良いかと云えば、パラメータ t が１増えるごとに直線上では方向ヴェクター $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ の大きさ分だけ点が移動するわけですから、元々方向ヴェクター $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ を単位ヴェクターで取っておけばパラメータの変化１が丁度点の距離１の変化に一致する事になります。

これを数式で表現すると、合成関数 $F(t)=f(x(t),y(t))=f(a+tv,b+tw)$ を t の関数として考えると云う事になる筈です。

例えばこの合成関数を t に関して（点 $t=0$ で）微分すれば、曲面 $z=f(x,y)$ を平面 P で切った切り口の曲線の接戦の傾きが出る筈です。これを、関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) におけるヴェクター $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ 方向の方向微分係数と言います。

もし $f(x,y)$ が偏微分可能で更に偏導関数が連続であれば、先に見た合成関数の微分の様子から、この方向微分係数は

$$F'(0)=f_x(a,b)v+f_y(a,b)w=\begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

となっています。当然ですが $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向（x-軸方向）の方向微分は $f_x(a,b)$ ですし、$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向（y-軸方向）の方向微分は $f_y(a,b)$ になっていますね。

従って $f_x(a,b)$ と $f_y(a,b)$ と云うたった２方向での方向微分さえ求めておけば、後は内積を取る事によって全ての方向での方向微分が求まってしまうと見る事が出来るでしょう。そう云う意味でたった２方向しかやっていない印象のある偏微分ではありますが、実はこれだけで十分多くの事が分かってしまうわけなんです。

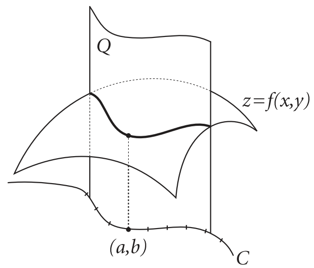
このヴェクター（関数）$\begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}$ は今後もよく利用しますが、特別に名前がつけられています。これを関数 $f(x,y)$ の（点 (a,b) に於ける）勾配（gradient）と言い、記号：$grad f(a,b)$ で表す事にします。

12.5 参考：曲線に沿った微分

この様に、直線に沿って (x,y) を (a,b) に近づけた場合の関数 $f(x,y)$ の値の変化率は方向微分係数（これは特殊な場合として偏微分係数を含んでいます）で計算される事が分かりましたが、以前２変数関数の極限値を計算した時に見た様に平面内での点の近づけ方は他にも沢山あった筈です。そこで曲線に沿って (x,y) を (a,b) に近づけた場合の変化率はどうやって計算されるか考えてみましょう。

下図の様に xy-平面内の点 (a,b) を通る曲線 $C:\mathbb{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ を考えて、この曲線上での関数 $f(x,y)$ の値 $f(x(t),y(t))$ の変化を見ます。

曲線 C を z-軸方向に伸ばして得られる曲面 Q と２変数関数 $z=f(x,y)$ のグラフの交線が曲線 C 上での $f(x,y)$ のグラフになっています。



本来、点 (x,y) の変化量に対する値 $f(x,y)$ の変化量の比を見ようようとしているわけですが、ここで１つ問題があります。同じ（軌跡をもつ）曲線でも、内部のパラメータの取り方は様々です（同じ道を走っていても車の速度は色々です)。

だからパラメーター t の変化に対する値 $f(x(t),y(t))$ の変化量の比で計算しようとするならば違うパラメーター（＝違う速度）で計算すると当然 $f(x(t),y(t))$ の値の変化率も変わって来てしまいます。そう云う意味で、パラメーターの変化に対する点の位置の変化が常に１である様な状況で考えなければならない事が分かります。これは即ち速度

ヴェクターの大きさが常に１である様な等速運動を考える事ですが、パラメータの言葉で云えば弧長パラメータと云う事になります。

実際、点 (a,b)（この点はパラメータ $t=t_0$ とします）からパラメーターの正の向きの弧長を $s(t)$ とすれば、

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\mathbb{r}'(p)|dp, \qquad s'(t)=|\mathbb{r}'(t)|$$

ですので、この逆関数 $t=t(s)$ を考えれば $s=s(t(s))$ の両辺を微分して

$$1=s'(t(s))t'(s), \qquad t'(s)=\frac{1}{s'(t(s))}=\frac{1}{|\mathbb{r}'(t(s))|}$$

ですから

$$\mathbb{r}'(s)=\mathbb{r}'(t(s))t'(s)=\frac{\mathbb{r}'(t(s))}{|\mathbb{r}'(t(s))|}$$

となって、弧長をパラメータに取ると速度ヴェクターは常に単位ヴェクターである事が分かります。

そこで最初からパラメータ t は弧長で取ってあると仮定すれば、$F(t)=f(x(t),y(t))$ に対して、

$$F'(t)=f_x(x(t),y(t))x'(t)+f_y(x(t),y(t))y'(t)=\mathrm{grad}f(x(t),y(t))\cdot\mathbb{r}'(t)$$

が曲線 C に沿った変化率を表していますが、$\mathbb{r}'(t)$ は単位ヴェクターでしたので結局これは先に見た $\mathbb{r}'(t)$ 方向の方向微分係数に一致しています。

この様に、曲線に沿って近づけた時の変化率を見ても、それは結局接線方向の方向微分に他ならない事が分かります。しかも方向微分と云うもの自体、偏微分さえ計算してやれば後は内積でオッケーでしたね。

その意味で、偏微分さえやってしまえば、全ての近づけ方を制覇した事になると言えるでしょうか。

Exercise

基本演習 1 [教科書　問題 6.6] 次の場合に $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ を求めてください。

(1) $z=x^2-xy,\ x=t^2,\ y=2t.$

(2) $z=y\log x,\ x=t-\sin t,\ y=1-\cos t.$

基本演習 2 [教科書　問題 6.7] 次の場合に $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$ を求めてください。

(1) $z=\mathrm{e}^x\sin y,\ x=u+v,\ y=u-v.$

(2) $z=\log(x^2+y^2),\ x=\frac{1}{2}(u^2-v^2),\ y=uv.$

基本演習 3 $z=f(x,y)=2x^2+3y^2$ とするとき以下の問いに答えて下さい。

(1) $x=\cos t, y=\sin t$ のときの $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ を求めて下さい。

(2) $x=u+v, y=uv$ のときの z_u,z_v を求めて下さい。

基本演習 4 $f(s,t)=st, s=\mathrm{e}^{-x}, t=x\sin y-y\cos y$ であるときに、$F(x,y)=f(s(x,y),t(x,y))$ について以下の問いに答えて下さい。

(1) $F(x,y)$ の２次までの偏導関数を全て求めて下さい。

(2) $F_{xx}+F_{yy}$ を求めて下さい。

発展演習 5 $v(x,y),w(x,y)$ は 2 階偏微分可能であって各種偏導関数は連続であると仮定します。

(1) $f(x+iy)=v(x,y)+iw(x,y)$ が複素変数・複素数値関数の意味で『複素微分可能』である、つまり、任意の (a,b) に対して極限値

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x+iy)-f(a+ib)}{x+iy-(a+ib)}$$

が存在するとき、

$$v_x=w_y,\quad v_y=-w_x$$

となっていることを示して下さい。

(2) $v_{xx}+v_{yy}=0, w_{xx}+w_{yy}=0$ であることを示して下さい。

基本演習 6 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とするとき、２変数関数 $f(x,y)$ を r,θ の関数と見て、２階の偏微分を計算してください。