12　合成関数の偏導関数

Exersice 解答例

基本演習 1 [教科書　問題 6.6] 次の場合に $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ を求めてください。

(1) $z = x^2 - xy$, $x = t^2$, $y = 2t$.

(2) $z = y\log x$, $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

(1)

$$\begin{aligned} z(t) &= t^4 - t^2 \cdot 2t \\ z'(t) &= 4t^3 - 6t^2 \end{aligned}$$

あるいは、

$$\begin{aligned} z'(t) &= z_x \cdot x' + z_y \cdot y' \\ &= (2x - y)(2t) + (-x)2 \\ &= (2t^2 - 2t)(2t) - 2t^2 \\ &= 4t^3 - 6t^2 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} z(t) &= (1 - \cos t)\log(t - \sin t) \\ z'(t) &= \sin t \log(t - \sin t) + \frac{1 - \cos t}{t - \sin t}(1 - \cos t) \\ &= \sin t \log(t - \sin t) + \frac{(1 - \cos t)^2}{t - \sin t} \end{aligned}$$

あるいは、

$$\begin{aligned} z'(t) &= z_x \cdot x' + z_y \cdot y' \\ &= \frac{y}{x}(1 - \cos t) + (\log x)\sin t \\ &= \frac{(1 - \cos t)^2}{t - \sin t} + \sin t \log(t - \sin t) \end{aligned}$$

□

基本演習 2 [教科書　問題 6.7] 次の場合に $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ を求めてください。

(1) $z = \mathrm{e}^x \sin y$, $x = u + v$, $y = u - v$.

(2) $z = \log(x^2 + y^2)$, $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, $y = uv$.

(1)

$$\begin{aligned} z_u &= z_x x_u + z_y y_u = \mathrm{e}^x \sin y \cdot 1 + \mathrm{e}^x \cos y \cdot 1 = \mathrm{e}^{u+v}\left\{\sin(u - v) + \cos(u - v)\right\} \\ z_v &= z_x x_v + z_y y_v = \mathrm{e}^x \sin y \cdot 1 + \mathrm{e}^x \cos y \cdot (-1) = \mathrm{e}^{u+v}\left\{\sin(u - v) - \cos(u - v)\right\} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} z_u &= z_x x_u + z_y y_u \\ &= \frac{2x}{x^2 + y^2}u + \frac{2y}{x^2 + y^2}v \\ &= \frac{u^3 - uv^2 + 2uv^2}{\frac{1}{4}(u^2 - v^2)^2 + u^2v^2} \\ &= \frac{4(u^3 + uv^2)}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{4u}{u^2 + v^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_v &= z_x x_v + z_y y_v \\ &= \frac{2x}{x^2 + y^2}(-v) + \frac{2y}{x^2 + y^2}u \\ &= \frac{v^3 - u^2v + 2u^2v}{\frac{1}{4}(u^2 - v^2)^2 + u^2v^2} \\ &= \frac{4(v^3 + u^2v)}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{4v}{u^2 + v^2} \end{aligned}$$

□

基本演習 3 $z = f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ とするとき以下の問いに答えて下さい。

(1) $x = \cos t, y = \sin t$ のときの $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ を求めて下さい。

(2) $x = u + v, y = uv$ のときの z_u, z_v を求めて下さい。

(1) t での微分をプライム記号 $'$ で表すことにします。

$$\begin{aligned} z' = f_x x' + f_y y' &= 4x(-\sin t) + 6y \cos t \\ &= -4 \cos t \sin t + 6 \sin t \cos t \\ &= 2 \cos t \sin t \\ &= \sin 2t \end{aligned}$$

あるいは、

$$z' = (2\cos^2 t + 3\sin^2 t)' = (2 + \sin^2 t)' = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$$

(2)

$$\begin{aligned} z_u &= f_x x_u + f_y y_u = 4x \cdot 1 + 6yv = 4(u + v) + 6uv^2 \\ z_v &= f_x x_v + f_y y_v = 4x \cdot 1 + 6yu = 4(u + v) + 6u^2 v \end{aligned}$$

もしくは

$$z = 2(u + v)^2 + 3u^2 v^2$$

ですから

$$\begin{aligned} z_u &= 4(u + v) + 6uv^2 \\ z_v &= 4(u + v) + 6u^2 v \end{aligned}$$

□

基本演習 4 $f(s, t) = st, s = \mathrm{e}^{-x}, t = x \sin y - y \cos y$ であるときに、$F(x, y) = f(s(x, y), t(x, y))$ について以下の問いに答えて下さい。

(1) $F(x, y)$ の２次までの偏導関数を全て求めて下さい。

(2) $F_{xx} + F_{yy}$ を求めて下さい。

(1)

$$F(x, y) = \mathrm{e}^{-x}(x \sin y - y \cos y)$$

ですから、偏導関数は以下の通り：

$$\begin{aligned} F_x &= -\mathrm{e}^{-x}(x \sin y - y \cos y) + \mathrm{e}^{-x} \sin y = \mathrm{e}^{-x}\{(1 - x) \sin y + y \cos y) \\ F_y &= \mathrm{e}^{-x}(x \cos y - \cos y + y \sin y) = \mathrm{e}^{-x}\{(x - 1) \cos y + y \sin y\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{xx} &= -\mathrm{e}^{-x}\{(1 - x) \sin y + y \cos y) + \mathrm{e}^{-x}(-\sin y) = \mathrm{e}^{-x}\{(x - 2) \sin y - y \cos y) \\ F_{xy} &= \mathrm{e}^{-x}\{(1 - x) \cos y + \cos y - y \sin y) = \mathrm{e}^{-x}\{(2 - x) \cos y - y \sin y) \\ F_{yx} &= -\mathrm{e}^{-x}\{(x - 1) \cos y + y \sin y\} + \mathrm{e}^{-x}(\cos y) = \mathrm{e}^{-x}\{(2 - x) \cos y - y \sin y) \\ F_{yy} &= \mathrm{e}^{-x}\{-(x - 1) \sin y + \sin y + y \cos y\} = \mathrm{e}^{-x}\{(2 - x) \sin y + y \cos y\} \end{aligned}$$

(2)

$$F_{xx} + F_{yy} = 0.$$

□

発展演習 5 $v(x,y), w(x,y)$ は 2 階偏微分可能であって各種偏導関数は連続であると仮定します。

(1) $f(x+iy) = v(x,y) + iw(x,y)$ が複素変数・複素数値関数の意味で『複素微分可能』である、つまり、任意の (a,b) に対して極限値

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x+iy)-f(a+ib)}{x+iy-(a+ib)}$$

が存在するとき、

$$v_x = w_y, \quad v_y = -w_x$$

となっていることを示して下さい。

(2) $v_{xx} + v_{yy} = 0, w_{xx} + w_{yy} = 0$ であることを示して下さい。

(1) 極限値が存在しているのでその値を $L(a,b)$ と置けば、特に x-軸に平行に近づけた場合、

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x+ib)-f(a+ib)}{x-a} = L(a+ib)$$

です。従って

$$\begin{aligned}\frac{f(x+ib)-f(a+ib)}{x-a} &= \frac{v(x,b)+iw(x,b)-v(a,b)-iw(a,b)}{x-a} \\ &= \frac{v(x,b)-v(a,b)}{x-a} + i\frac{w(x,b)-w(a,b)}{x-a} \\ &\to u_x(a,b) + iv_x(a,b) = L(a,b) \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

です。

一方 y-軸に平行に近づけても

$$\lim_{y\to b} \frac{f(a+iy)-f(a+ib)}{i(y-b)} = L(a+ib)$$

のはずですから

$$\begin{aligned}\frac{f(a+iy)-f(a+ib)}{i(y-b)} &= \frac{v(a,y)+iw(a,y)-v(a,b)-iw(a,b)}{i(y-b)} \\ &= \frac{v(a,y)-v(a,b)}{i(y-b)} + i\frac{w(a,y)-w(a,b)}{i(y-b)} \\ &= -i\frac{v(a,y)-v(a,b)}{y-b} + \frac{w(a,y)-w(a,b)}{y-b} \\ &\to w_y(a,b) - iv_y(a,b) = L(a,b) \quad \cdots(**)\end{aligned}$$

となっています。従って $(*)$、$(**)$ によれば、

$$v_x(a,b) = w_y(a,b), \quad v_y(a,b) = -w_x(a,b)$$

が成立しています。

(2)

$$v_{xx} = w_{yx} = w_{xy} = -v_{yy}$$

ですから確かに $v_{xx} + v_{yy} = 0$ です。また、

$$w_{xx} = -v_{yx} = -v_{xy} = -w_{yy}$$

でもあり、確かに $w_{xx} + w_{yy} = 0$ でもあります。 □

基本演習 6 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とするとき、２変数関数 $f(x,y)$ を r,θ の関数と見て、２階の偏微分を計算してください。

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ によって r,θ の関数と見ると

$$\begin{aligned}f_r &= f_x x_r + f_y y_r = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta \\ f_\theta &= f_x x_\theta + f_y y_\theta = -f_x r\sin\theta + f_y r\cos\theta\end{aligned}$$

なので、２階偏微分は

$$\begin{aligned}f_{rr} &= (f_x)_r\cos\theta + (f_y)_r\sin\theta \\ &= (f_{xx}x_r + f_{xy}y_r)\cos\theta + (f_{yx}x_r + f_{yy}y_r)\sin\theta \\ &= f_{xx}\cos^2\theta + f_{xy}\sin\theta\cos\theta + f_{yx}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta \\ f_{r\theta} = f_{\theta r} &= (f_x)_\theta\cos\theta - f_x\sin\theta + (f_y)_\theta\sin\theta + f_y\cos\theta \\ &= (f_{xx}x_\theta + f_{xy}y_\theta)\cos\theta - f_x\sin\theta + (f_{yx}x_\theta + f_{yy}y_\theta)\sin\theta + f_y\cos\theta \\ &= \{f_{xx}(-r\sin\theta) + f_{xy}r\cos\theta\}\cos\theta - f_x\sin\theta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \{f_{yx}(-r\sin\theta) + f_{yy} r\cos\theta\}\sin\theta + f_y\cos\theta \\
&= -f_{xx} r\sin\theta\cos\theta + f_{xy} r\cos^2\theta - f_x\sin\theta \\
&\quad - f_{yx} r\sin^2\theta + f_{yy} r\cos\theta\sin\theta + f_y\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{\theta\theta} &= -(f_x)_\theta r\sin\theta - f_x r\cos\theta + (f_y)_\theta r\cos\theta - f_y r\sin\theta \\
&= -(f_{xx}x_\theta + f_{xy}y_\theta) r\sin\theta - f_x r\cos\theta + (f_{yx}x_\theta + f_{yy}y_\theta) r\cos\theta + f_y r\sin\theta \\
&= -\{f_{xx}(-r\sin\theta) + f_{xy} r\cos\theta\} r\sin\theta - f_x r\cos\theta \\
&\qquad + \{f_{yx}(-r\sin\theta) + f_{yy} r\cos\theta\} r\cos\theta + f_y r\sin\theta \\
&= f_{xx} r^2\sin^2\theta - f_{xy} r^2\cos\theta\sin\theta - f_x r\cos\theta \\
&\qquad - f_{yx} r^2\sin\theta\cos\theta + f_{yy} r^2\cos^2\theta + f_y r\sin\theta
\end{aligned}
$$

となります。

このとき、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} &= f_{xx}\sin^2\theta - f_{xy}\cos\theta\sin\theta - f_x\frac{1}{r}\cos\theta \\
&\qquad - f_{yx}\sin\theta\cos\theta + f_{yy}\cos^2\theta + f_y\frac{1}{r}\sin\theta
\end{aligned}
$$

から、

$$
f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}
$$

が成り立つことが分かります。 □