

12 合成関数の偏導関数

■今日の講義内容

合成関数の微分規則
方向微分

■講義中にやらなければならない事

基本演習 1、2

■講義終了後次回までにやらなければならない事

今日の講義全体を振り返り（特に話の流れに留意して）内容を把握し直すこと。
基本演習 3、4

重要事項

■合成関数の微分

事実 12.1 g, h が微分可能、 f が偏微分可能であって、更に f_x, f_y が連続関数であるならば、合成 $k(t) = f(g(t), h(t))$ が定義できる範囲において

$$k'(t) = f_x(g(t), h(t))g'(t) + f_y(g(t), h(t))h'(t)$$

$$f'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

あるいは以下のようにも書きます：

$$\frac{dk}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t), h(t)) \frac{dg}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t), h(t)) \frac{dh}{dt}(t)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

問題 12.2 つぎの各関数に関して合成関数 $F(t) = f(g(t), h(t))$ の微分を計算して下さい。

$$f(x, y) = x^2 - y^2, \quad g(t) = e^t + e^{-t}, \quad h(t) = e^t - e^{-t}$$

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -2y, \quad g'(t) = e^t - e^{-t}, \quad h'(t) = e^t + e^{-t}$$

ですから

$$F'(t) = 2x(t)(e^t - e^{-t}) - 2y(t)(e^t + e^{-t}) = 2(e^{2t} - e^{-2t}) - 2(e^{2t} - e^{-2t}) = 0$$

あるいは実際に合成した関数を書き下して微分しても良い：

$$F(t) = (e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2 = 4$$

□

事実 12.3 f, g, h が偏微分可能であって、更に f_x, f_y が連続関数であるならば、合成 $k(v, w) = f(g(v, w), h(v, w))$ が定義できる範囲において ($k = f, g = x, h = y$ などと同一視します)

$$k_v(v, w) = f_x(g(v, w), h(v, w))g_v(v, w) + f_y(g(v, w), h(v, w))h_v(v, w)$$

$$f_v = f_x x_v + f_y y_v$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$k_w(v, w) = f_x(g(v, w), h(v, w))g_w(v, w) + f_y(g(v, w), h(v, w))h_w(v, w)$$

$$f_w = f_x x_w + f_y y_w$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w}$$

問題 12.4 $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2, x = u + v, y = uv$ とするとき、 f_u, f_v を求めてください。

$$f_u = f_x x_u + f_y y_u = 4x \cdot 1 + 6y \cdot v = 4(u + v) + 6uv^2$$

$$f_v = f_x x_v + f_y y_v = 4x \cdot 1 + 6y \cdot u = 4(u + v) + 6u^2v$$

あるいは、 $f(x, y) = 2(u + v)^2 + 3u^2v^2$ と計算した上で

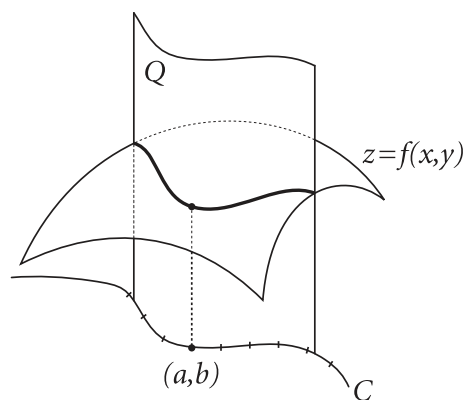
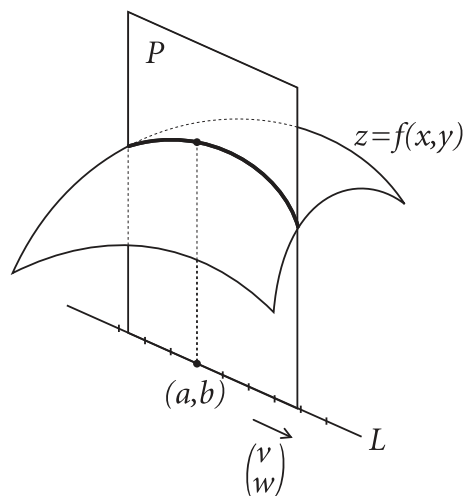
$$f_u = 4(u + v) + 6uv^2, \quad f_v = 4(u + v) + 6uv^2$$

です。

□

問題 12.5 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とするとき、2変数関数 $f(x, y)$ を r, θ の関数と見て、偏微分を計算してください。

■方向微分



Exercise

基本演習 1 [教科書 問題 6.6] 次の場合に $\frac{dz}{dt}$ を求めてください。

- (1) $z = x^2 - xy, x = t^2, y = 2t.$
- (2) $z = y \log x, x = t - \sin t, y = 1 - \cos t.$

基本演習 2 [教科書 問題 6.7] 次の場合に $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ を求めてください。

- (1) $z = e^x \sin y, x = u + v, y = u - v.$
- (2) $z = \log(x^2 + y^2), x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), y = uv.$

基本演習 3 $z = f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ とするとき以下の問いに答えて下さい。

- (1) $x = \cos t, y = \sin t$ のときの $\frac{dz}{dt}$ を求めて下さい。
- (2) $x = u + v, y = uv$ のときの z_u, z_v を求めて下さい。

基本演習 4 $f(s, t) = st, s = e^{-x}, t = x \sin y - y \cos y$ であるときに、 $F(x, y) = f(s(x, y), t(x, y))$ について以下の問いに答えて下さい。

- (1) $F(x, y)$ の 2 次までの偏導関数を全て求めて下さい。
- (2) $F_{xx} + F_{yy}$ を求めて下さい。

発展演習 5 $v(x, y), w(x, y)$ は 2 階偏微分可能であって各種偏導関数は連続であると仮定します。

(1) $f(x + iy) = v(x, y) + iw(x, y)$ が複素変数・複素数値関数の意味で『複素微分可能』である、つまり、任意の (a, b) に対して極限值

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{f(x + iy) - f(a + ib)}{x + iy - (a + ib)}$$

が存在するとき、

$$v_x = w_y, \quad v_y = -w_x$$

となっていることを示して下さい。

- (2) $v_{xx} + v_{yy} = 0, w_{xx} + w_{yy} = 0$ であることを示して下さい。

基本演習 6 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とするとき、2変数関数 $f(x, y)$ を r, θ の関数と見て、2 階の偏微分を計算してください。