

13 平面曲線の接線・法線と特異点

13.1 法線

一般に 2 変数の方程式 $g(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) の全体は xy -平面内の曲線となります。例えば $g(x, y) = y - x^2$ なら、 $g(x, y) = 0$ が表す曲線は放物線ですね。

ある質点の運動 $(x(t), y(t))$ があって、この質点は常に曲線 $g(x, y) = 0$ 上を動いているものと仮定します。

これはすなわち、任意の t について

$$g(x(t), y(t)) = 0$$

が成り立っていると、そう言う事であります。

ここでこの関係式の両辺を t で微分しますと、 $g(x, y)$ は偏微分可能で偏導関数は連続であるならば合成関数の微分法則から

$$0 = g_x(x(t), y(t))x'(t) + g_y(x(t), y(t))y'(t) = \begin{pmatrix} g_x(x(t), y(t)) \\ g_y(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

となりますから、最後の内積の形から分かるようにベクトル $\begin{pmatrix} g_x(x(t), y(t)) \\ g_y(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$ は質点

の速度ベクトル $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ と直交しています。

質点の運動においてその速度ベクトルは常に運動の接線方向を向いていますから結局、ベクトル $\begin{pmatrix} g_x(x, y) \\ g_y(x, y) \end{pmatrix}$ は曲線 $g(x, y) = 0$ 上の各点においてこの曲線の法線ベクトルである事が分かります。

前回にも少し触れましたが、このベクトルの事を $\text{grad}g(x, y)$ と書いて $g(x, y)$ のグラディエント（あるいは勾配）と言います：

$$\text{grad}g(x, y) = \begin{pmatrix} g_x(x, y) \\ g_y(x, y) \end{pmatrix}$$

特に曲線 $g(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) における法線のパラメータ方程式は、 $\text{grad}g(a, b) \neq \mathbf{0}$ であれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} g_x(a, b) \\ g_y(a, b) \end{pmatrix} \quad (w \text{ はパラメータ})$$

となります。

13.2 接線

対して曲線 $g(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) での接線は、法線ベクトルと直交する事から

$$g_x(a, b)(x - a) + g_y(a, b)(y - b) = 0$$

と云う方程式で表されます。これを無理矢理パラメータ表示すれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} g_y(a, b) \\ -g_x(a, b) \end{pmatrix} \quad (w \text{ はパラメータ})$$

となります。ただしいずれも $\text{grad}g(a, b) = \mathbf{0}$ である場合は意味をなしませんので注意が必要です。

方程式 $g(x, y) = 0$ において変数 y を x の関数と考えて両辺を x で微分すると

$$g_x(x, y(x)) \cdot 1 + g_y(x, y(x))y'(x) = 0$$

$$y'(x) = -\frac{g_x(x, y(x))}{g_y(x, y(x))}$$

が得られますが（勿論 $g_y \neq 0$ であるような点においてですが）、これは確かに今求めた接線の傾きと一致していますね。

逆に今度は方程式 $g(x, y) = 0$ において x を y の関数と見れば両辺を y で微分する事によって $g_x \neq 0$ である点では

$$g_x(x(y), y)x'(y) + g_y(x(y), y) \cdot 1 = 0$$

$$x'(y) = -\frac{g_y(x(y), y)}{g_x(x(y), y)}$$

となっている事が分かります。これは x -軸と y -軸の役割をいつもと逆転させているだけですからこの場合もやはり接線の傾きを計算する事が出来ています。

つまり、結局は、 g_x と g_y の何れか一方でも 0 でないような点においてはちゃんと接線の傾きが求まり、接線の方程式を書くことが出来ます。この辺りの事情がさっき出て来た $\text{grad}g \neq \mathbf{0}$ と云う条件なんですね。

基本演習 1 $F(x, y) = x^2(x + 2) - y^2$ のとき、方程式 $F(x, y) = 0$ が表す曲線上の点 $(a, b) \neq (0, 0)$ における法線と接線の方程式とパラメータ表示を求めてください。

$$F_x = 3x^2 + 4x, \quad F_y = -2y$$

ですから、 $(a, b) \neq (0, 0)$ であれば $\text{grad}F(a, b) \neq \mathbf{0}$ であり、法線のパラメータ表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3a^2 + 4a \\ -2b \end{pmatrix}$$

となります。従って接線のパラメータ表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2b \\ 3a^2 + 4a \end{pmatrix}$$

です。

また、接線の方程式は

$$\begin{aligned} (3a^2 + 4a)(x - a) + (-2b)(y - b) &= 0 \\ (3a^2 + 4a)x - 2by - a^3 &= 0 \end{aligned}$$

であり、法線の方程式は

$$\begin{aligned} 2b(x - a) + (3a^2 + 4a)(y - b) &= 0 \\ 2bx + (3a^2 + 4a)y - 3ab(a + 2) &= 0 \end{aligned}$$

です。

□

基本演習 2 [教科書 問題 7.3 (1)] (1) 円周: $x^2 + y^2 = c^2$ ($c \neq 0$) 上の点 (a, b) における接線と法線の方程式を求めて下さい。

(2) 放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 (a, b) における接線と法線の方程式を求めてください。

(1) $F(x, y) = x^2 + y^2 - c^2$ と置けば、問題の曲線は $F(x, y) = 0$ と表すことができます。

$$F_x = 2x, \quad F_y = 2y$$

ですから、 $\text{grad}F = \mathbf{0}$ となるのは原点のみであり、原点はこの曲線上にありませんから、曲線上では $\text{grad}F \neq \mathbf{0}$ です。

従ってこの円周上の各点において法線・接線の方程式は

$$(\text{法線}): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}$$

$$(\text{接線}): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2b \\ -2a \end{pmatrix}$$

となります (t はパラメータ)。

あるいは、1 次方程式で表現すれば

$$(\text{接線}): a(x - a) + b(y - b) = 0, \quad \text{すなわち} \quad ax + by = c^2$$

$$(\text{法線}): b(x - a) - a(y - b) = 0, \quad \text{すなわち} \quad bx - ay = 0$$

となります。

(2) $G(x, y) = y^2 - 4px$ と置けば問題の曲線は $G(x, y) = 0$ で表されます。これが放物線だと言っているので $p \neq 0$ が分かります。

このとき

$$\text{grad}G(x, y) = \begin{pmatrix} -4p \\ 2y \end{pmatrix}$$

であって、 $p \neq 0$ から曲線上の任意の点で $\text{grad}G(x, y)$ はゼロベクトルとはなりません。

従って法線・接線の方程式は

$$(\text{法線}): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4p \\ 2b \end{pmatrix}$$

$$(\text{接線}): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2b \\ 4p \end{pmatrix}$$

となります (t はパラメータ)。

あるいは、1 次方程式で表現すれば

$$(\text{接線}): -4p(x - a) + 2b(y - b) = 0$$

$$(\text{法線}): 2b(x - a) + 4p(y - b) = 0$$

となります。

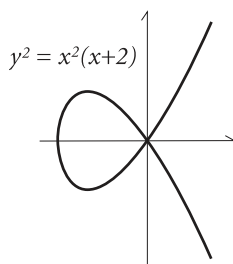
□

13.3 特異点

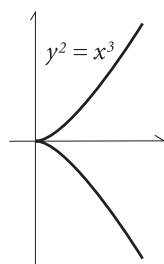
以上のような事情から、方程式 $g(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) で、 $\text{grad}g(a, b) = \mathbf{0}$ となるような点の事をこの曲線の特異点と言います。

しかしこの特異点と言うのは何でしょうか？ $g_y(a, b) = 0$ だけなら、これは接線が y -軸に平行になっていると云う事だし、 $g_x(a, b) = 0$ は接線が x -軸に平行と云う事です。どちらも特に変わったことではありませんが、これが“同時に起こる”と云うのはちょっと想像出来ません。そこで具体的な特異点の例を見ておく必要があるでしょう。

例えば $F(x, y) = x^2(x+2) - y^2$ のとき、方程式 $F(x, y) = 0$ が表す曲線は下図左のようになりますが、 $\text{grad}F(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 4x \\ -2y \end{pmatrix}$ ですから、この曲線上の点で $\text{grad}F = \mathbf{0}$ となる特異点は原点のみです。



node型特異点



cusp型特異点

同様に上図右の場合、 $H(x, y) = x^3 - y^2$ としたときの曲線 $H(x, y) = 0$ でも gradient を計算すれば原点が特異点になっていることが分かります。

どちらの場合も確かに接線と云う概念を普通には考えることが出来ないのが分かるでしょうか？

左図の場合、原点で自分自身と交差してしまっています。その交差した1本1本を区別して考えれば、その1本だけに関しては原点で普通に接線も引けますから“特異”でも何でもないので、全体として2本まとめて考えると接線が1本に定まらず“特異”な状況になってしまいます。

一方、右図の場合、直線 $y = 0$ は原点における接線になっていますが、これを先に見たような偏微分係数を使った『通常の手続き』を踏んで求める事は出来ません。

原点付近で x を y の関数として考えることは実は可能で、ちゃんと1対1関数になってくれます。しかし、残念ながら尖っているので x を y の関数として表した場合それは微分不可能な関数になってしまい、やはりその微分を考える事が出来ません。

しかしこうした特異点の定義も、残念ながら不十分なものと言わなければなりません。

例えば $F(x, y) = x - y$ のとき、方程式 $F(x, y) = 0$ の表す曲線は直線 $y = x$ であり、gradient を計算するまでもなくこの曲線の特異点を持ちません。

一方、 $G(x, y) = (x - y)^2$ に対して曲線 $G(x, y) = 0$ を考えた場合は、

$$\text{grad}G(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x - y) \\ -2(x - y) \end{pmatrix}$$

であり、曲線 $G(x, y) = 0$ 上の任意の点で $\text{grad}G = \mathbf{0}$ となり、全ての点が特異点になっています。

しかしこの曲線 $G(x, y) = 0$ とは、実際には直線 $y = x$ に他ならず、結果的に直線 $y = x$ 上の任意の点が特異点であると言う、直前に見た結果に真っ向から反した奇妙な結果が導き出されてしまうのです。これは一体どう云う事なのでしょう？

この問題は $F(x, y) = G(x, y)H(x, y)$ と書けている時に曲線 $F(x, y) = 0$ を考えてみるとよく分かります。

$F(x, y) = 0$ であることは、 $G(x, y) = 0$ または $H(x, y) = 0$ であることと同値ですから、曲線 $F(x, y) = 0$ は、2つの曲線 $G(x, y) = 0$ と $H(x, y) = 0$ を併せたものになる筈です。このような場合にそれぞれの曲線を個別に解析するのではなく、2本をまとめて $F(x, y) = 0$ として解析するとどうなるのでしょうか。この場合 Gradient は

$$\text{grad}F(x, y) = \begin{pmatrix} G_x H + G H_x \\ G_y H + G H_y \end{pmatrix}$$

ですから、仮に2曲線 $G(x, y) = 0, H(x, y) = 0$ が交点をもつとしたら、その交点では $G = H = 0$ ですから gradient もゼロになる事が分かります。この様にして2曲線の交点はそれらをまとめて考えた曲線の特異点になるわけです。先に見た曲線 $x^2(x+2) - y^2 = 0$ において自己交差する点（原点）が特異点になっていたことが思い出されるでしょう。このような特異点は特に2重点とも呼ばれます。

このような事情を知ったあとで、曲線 $(x - y)^2 = 0$ を眺めると、これは $(x - y)(x - y) = 0$ であって、『直線 $y = x$ と直線 $y = x$ を併せたもの』である故に2本の同じ直線が重なっており、全ての点が2重点＝特異点になってしまっているわけです。

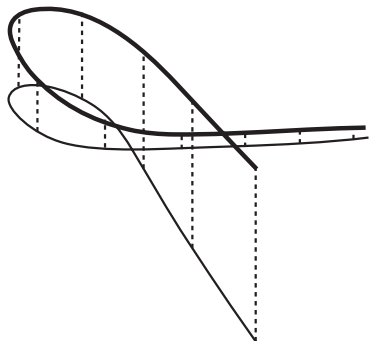
13.4 特異点の解消

言うまでもなく特異点と云うものは1つの障害です。その点では交差や先鋭があり、接線などを通常の意味で考えることが出来なくなってしまいます。

確かにこれは困難ではありますが、それは困難であるが故にそこを克服しようとする試みを呼び込み、また、困難であるからこそそこには興味深い数学が詰まっています。

数学者たちはこんなことを考えました。これは影なのだと。

本当の曲線は空中（3次元空間内）にあって、僕たちが見ているのはその影なのだと。



ジェットコースターの様なものを考えて下さい。スタート地点からゴールまで空中を滑らかな曲線を描いてレールが敷かれていますが、その様子を上空から見ると立体交差している部分は“交点”に見えてしまいます。実際には立体交差ですからレール同士は交わっていませんが、それを上空から見る、即ち、地面と云う2次元空間に射影してみるとそこはたちまち交点（特異点、2重点）になってしまうのです。

だから逆に、特異点をもつ様な平面曲線があった時に、ある3次元空間内の空間曲線で、影が（ xy -平面への射影が）その平面曲線になる様なものを上手く（特異点をもたない様に）構成してやれば、解析的な計算は3次元の方で実行することが出来るようになるのです。この様に特異点の近くで次元を増やしてやって、今見ているものは高次元の曲線の射影なのだと解釈することによって特異点を解消しようとする方法があります。これが“blowup”と呼ばれる技術の原型です。

何か窮屈なことが起きている時にはそこで次元を増やしてやって余裕を与えてやれば物事はスムーズに進むわけです。

Exercise

基本演習 1 $F(x, y) = x^2(x + 2) - y^2$ のとき、方程式 $F(x, y) = 0$ が表す曲線上の点 $(a, b) \neq (0, 0)$ における法線と接線の方程式とパラメータ表示を求めてください。

基本演習 2 [教科書 問題 7.3 (1)] (1) 円周: $x^2 + y^2 = c^2$ ($c \neq 0$) 上の点 (a, b) における接線と法線の方程式を求めて下さい。

(2) 放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 (a, b) における接線と法線の方程式を求めてください。

基本演習 3 各曲線上の点 (v, w) における接線・法線を求め、また特異点も求めて下さい（ただし a は定数とします）。

- (1) $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ (2) $y^2 = (x - a)^3$
 (3) $y^2 - x^2y + x^3 = 0$ (4) $x^3 - 2x^2 - xy - 2y = 0$

定期試験の過去問から

問題 13.1 $F(x, y) = (x + y + 1)^2 - x(x - 3)^2$ のとき、方程式 $F(x, y) = 0$ の定める曲線について以下の問いに答えてください：

- (1) 特異点があれば求めてください。
 (2) 曲線 $F(x, y) = 0$ 上の点 $(4, -3)$ における接線の方程式を求めてください。

問題 13.2 $F(x, y) = (x^2 + 2y)^2 - 4x^2(x - 2)(x + y)$ とするとき、以下の問いに答えて下さい。

- (1) $F(x, y)$ の偏導関数を求めて下さい。
 (2) $x = 0$ のとき、 $x = 2$ のとき、あるいは $x + y = 0$ のときに F_x が 0 であることを確認して下さい。もしそうでなかったなら、(1) の計算を間違えたと言うことになりますのでやり直して下さい。
 (3) 曲線 $F(x, y) = 0$ 上の特異点、つまり、連立方程式：

$$\begin{cases} F_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$$

を満たす点を全て求めて下さい。

問題 13.3 $G(x, y) = x^2 - 5y^2 - 1$ とするとき、曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 $(9, -4)$ における接線の方程式を求めて下さい。

問題 13.4 方程式 $x^2(x + 3) = y^2$ の表す曲線について以下の問いに答えて下さい。

- (1) 曲線上の点 $(1, 2)$ における接線の方程式を求めて下さい。
 (2) この曲線の特異点を求めて下さい。なければならないと答えて下さい。

問題 13.5 曲線 $y = 4x^2$ 上の点 $(c, 4c^2)$ における接線と法線の方程式（あるいはパラメータ表示された方程式）を求めて下さい。