

13 平面曲線の接線・法線と特異点

Exercise 解答例

基本演習 1 $F(x, y) = x^2(x + 2) - y^2$ のとき、方程式 $F(x, y) = 0$ が表す曲線上の点 $(a, b) \neq (0, 0)$ における法線と接線の方程式とパラメータ表示を求めてください。

$$F_x = 3x^2 + 4x, \quad F_y = -2y$$

ですから、 $(a, b) \neq (0, 0)$ であれば $\text{grad}F(a, b) \neq \mathbf{0}$ であり、法線のパラメータ表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3a^2 + 4a \\ -2b \end{pmatrix}$$

となります。従って接線のパラメータ表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2b \\ 3a^2 + 4a \end{pmatrix}$$

です。

また、接線の方程式は

$$\begin{aligned} (3a^2 + 4a)(x - a) + (-2b)(y - b) &= 0 \\ (3a^2 + 4a)x - 2by - a^3 &= 0 \end{aligned}$$

であり、法線の方程式は

$$\begin{aligned} 2b(x - a) + (3a^2 + 4a)(y - b) &= 0 \\ 2bx + (3a^2 + 4a)y - 3ab(a + 2) &= 0 \end{aligned}$$

です。 □

基本演習 2 [教科書 問題 7.3 (1)] (1) 円周: $x^2 + y^2 = c^2$ ($c \neq 0$) 上の点 (a, b) における接線と法線の方程式を求めて下さい。

(2) 放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 (a, b) における接線と法線の方程式を求めてください。

(1) $F(x, y) = x^2 + y^2 - c^2$ と置けば、問題の曲線は $F(x, y) = 0$ と表せます。

$$F_x = 2x, \quad F_y = 2y$$

$\text{grad}F = \mathbf{0}$ となるのは原点のみですが原点はこの曲線上にありませんから、曲線上では $\text{grad}F \neq \mathbf{0}$ です。従ってこの円周上の各点において法線・接線の方程式は

$$(\text{法線}): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}$$

$$(\text{接線}): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2b \\ -2a \end{pmatrix}$$

となります (t はパラメータ)。

あるいは、1次方程式で表現すれば

$$(\text{接線}): a(x - a) + b(y - b) = 0, \quad \text{すなわち} \quad ax + by = c^2$$

$$(\text{法線}): b(x - a) - a(y - b) = 0, \quad \text{すなわち} \quad bx - ay = 0$$

となります。

(2) $G(x, y) = y^2 - 4px$ と置けば問題の曲線は $G(x, y) = 0$ で表されます。これが放物線だと言っているので $p \neq 0$ が分かります。

このとき

$$\text{grad}G(x, y) = \begin{pmatrix} -4p \\ 2y \end{pmatrix}$$

であって、 $p \neq 0$ から曲線上の任意の点で $\text{grad}G(x, y) \neq \mathbf{0}$ です。従って法線・接線の方程式は

$$(\text{法線}): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4p \\ 2b \end{pmatrix}$$

$$(\text{接線}): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2b \\ 4p \end{pmatrix}$$

となります (t はパラメータ)。

あるいは、1次方程式で表現すれば

$$(\text{接線}): -4p(x - a) + 2b(y - b) = 0$$

$$(\text{法線}): 2b(x - a) + 4p(y - b) = 0$$

となります。 □

基本演習 3 各曲線上の点 (v, w) における接線・法線を求め、また特異点も求めて下さい (ただし a は定数とします)。

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^3 - 3xy + y^3 = 0 & (2) \quad & y^2 = (x - a)^3 \\ (3) \quad & y^2 - x^2y + x^3 = 0 & (4) \quad & x^3 - 2x^2 - xy - 2y = 0 \end{aligned}$$

(1) $F(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ と置けば、問題の曲線は $F(x, y) = 0$ と書けます。

$$\text{grad}F(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ -3x + 3y^2 \end{pmatrix}$$

ですから、特異点は連立方程式：

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ -x + y^2 = 0 \\ x^3 - 3xy + y^3 = 0 \end{cases}$$

の解です。これは簡単に解けて解は $(x, y) = (0, 0)$ のみです。従って特異点は $(0, 0)$ 1 点であり、それ以外の点 (v, w) における法線と接線は

$$\begin{aligned} (\text{法線}) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v^2 - w \\ -v + w^2 \end{pmatrix} \\ (\text{接線}) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v - w^2 \\ v^2 - w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります (t はパラメータ)。

また、1 次方程式表現は以下の通り：

$$\begin{aligned} (\text{法線}) : & (v - w^2)(x - v) + (v^2 - w)(y - w) = 0 \\ (\text{接線}) : & (v^2 - w)(x - v) + (w^2 - v)(y - w) = 0 \end{aligned}$$

(2) $F(x, y) = y^2 - (x - a)^3$ と置けば、問題の曲線は $F(x, y) = 0$ と書けます。

$$\text{grad}F(x, y) = \begin{pmatrix} -3(x - a)^2 \\ 2y \end{pmatrix}$$

ですから、特異点は連立方程式：

$$\begin{cases} (x - a)^2 = 0 \\ y = 0 \\ y^2 - (x - a)^3 = 0 \end{cases}$$

の解です。これは簡単に解けて解は $(x, y) = (a, 0)$ のみです。従って特異点は $(a, 0)$ 1 点であり、それ以外の点 (v, w) における法線と接線は

$$\begin{aligned} (\text{法線}) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3(v - a)^2 \\ 2w \end{pmatrix} \\ (\text{接線}) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2w \\ 3(v - a)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります (t はパラメータ)。

また、1 次方程式表現は以下の通り：

$$\begin{aligned} (\text{法線}) : & 2w(x - v) + 3(v - a)^2(y - w) = 0 \\ (\text{接線}) : & -3(v - a)^2(x - v) + 2w(y - w) = 0 \end{aligned}$$

(3) $F(x, y) = y^2 - x^2y + x^3$ と置けば、問題の曲線は $F(x, y) = 0$ と書けます。

$$\text{grad}F(x, y) = \begin{pmatrix} -2xy + 3x^2 \\ 2y - x^2 \end{pmatrix}$$

ですから、特異点は連立方程式：

$$\begin{cases} -2xy + 3x^2 = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \\ y^2 - x^2y + x^3 = 0 \end{cases}$$

の解です。

第 2 式から $2y = x^2$ なのでこれを第 1 式に代入して $3x^2 - x^3 = 0$ が得られます。従って $x = 0, 3$ のいずれかであることが分かります。

$x = 0$ のとき $y = 0$ でもあり、これは第 3 式も満たしています。

$x = 3$ のとき $y = \frac{9}{2}$ ですが、これは第 3 式を満たしません。

以上から解は $(x, y) = (0, 0)$ のみです。従って特異点は $(0, 0)$ 1 点であり、それ以外の点 (v, w) における法線と接線は

$$(\text{法線}) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2vw + 3v^2 \\ 2w - v^2 \end{pmatrix}$$

$$(\text{接線}) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2w - v^2 \\ 2vw - 3v^2 \end{pmatrix}$$

となります (t はパラメータ)。

また、1 次方程式表現は以下の通り：

$$(\text{法線}) : (v + 2)(x - v) + (3v^2 - 4v - w)(y - w) = 0$$

$$(\text{接線}) : (3v^2 - 4v - w)(x - v) - (v + 2)(y - w) = 0$$

□

また、1 次方程式表現は以下の通り：

$$(\text{法線}) : (2w - v^2)(x - v) + (2vw - 3v^2)(y - w) = 0$$

$$(\text{接線}) : (-2vw + 3v^2)(x - v) + (2w - v^2)(y - w) = 0$$

(4) $F(x, y) = x^3 - 2x^2 - xy - 2y$ と置けば、問題の曲線は $F(x, y) = 0$ と書けます。

$$\text{grad}F(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 4x - y \\ -x - 2 \end{pmatrix}$$

ですから、特異点は連立方程式：

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x - y = 0 \\ -x - 2 = 0 \\ x^3 - 2x^2 - xy - 2y = 0 \end{cases}$$

の解です。

第 2 式から $x = -2$ であることが分かります。すると第 1 式から $y = 20$ ですが、これは第 3 式を満たしません。

以上から特異点は存在しません。各点 (v, w) における法線と接線は

$$(\text{法線}) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3v^2 - 4v - w \\ -v - 2 \end{pmatrix}$$

$$(\text{接線}) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v + 2 \\ 3v^2 - 4v - w \end{pmatrix}$$

となります (t はパラメータ)。