

13 平面曲線の接線・法線と特異点

■今日の講義内容
平面曲線の法線と接線 特異点
■講義中にやらなければならない事
基本演習 1、2、3
■講義終了後次回までにやらなければならない事
今日の講義全体を振り返り（特に話の流れに留意して）内容を把握し直すこと。 問題 13.1～13.5 の中から適宜

重要事項

■法線

ベクトル $\begin{pmatrix} g_x(x, y) \\ g_y(x, y) \end{pmatrix}$ は曲線 $g(x, y) = 0$ 上の各点においてこの曲線の法線ベクトルである事が分かります。

このベクトルの事を $\text{grad}g(x, y)$ と書いて $g(x, y)$ のグラディエント（あるいは勾配）と言います：

$$\text{grad}g(x, y) = \begin{pmatrix} g_x(x, y) \\ g_y(x, y) \end{pmatrix}$$

特に曲線 $g(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) における法線のパラメータ方程式は、 $\text{grad}g(a, b) \neq \mathbf{0}$ であれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} g_x(a, b) \\ g_y(a, b) \end{pmatrix} \quad (w \text{ はパラメータ})$$

となります。

■接線

曲線 $g(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) での接線は、 $\text{grad}g(a, b) \neq \mathbf{0}$ であれば方程式：

$$g_x(a, b)(x - a) + g_y(a, b)(y - b) = 0$$

で表されます。これをパラメータ表示すれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} g_y(a, b) \\ -g_x(a, b) \end{pmatrix} \quad (w \text{ はパラメータ})$$

となります。

■特異点

方程式 $g(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) で、 $\text{grad}g(a, b) = \mathbf{0}$ となるような点の事をこの曲線の特異点と言います。

Exercise

基本演習 1 $F(x, y) = x^2(x+2) - y^2$ のとき、方程式 $F(x, y) = 0$ が表す曲線上の点 $(a, b) \neq (0, 0)$ における法線と接線の方程式とパラメータ表示を求めてください。

基本演習 2 [教科書 問題 7.3 (1)] (1) 円周: $x^2 + y^2 = c^2$ ($c \neq 0$) 上の点 (a, b) における接線と法線の方程式を求めて下さい。

(2) 放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 (a, b) における接線と法線の方程式を求めてください。

基本演習 3 各曲線上の点 (v, w) における接線・法線を求め、また特異点も求めて下さい (ただし a は定数とします)。

- (1) $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ (2) $y^2 = (x - a)^3$
 (3) $y^2 - x^2y + x^3 = 0$ (4) $x^3 - 2x^2 - xy - 2y = 0$

定期試験の過去問から

問題 13.1 $F(x, y) = (x + y + 1)^2 - x(x - 3)^2$ のとき、方程式 $F(x, y) = 0$ の定める曲線について以下の問いに答えてください:

- (1) 特異点があれば求めてください。
 (2) 曲線 $F(x, y) = 0$ 上の点 $(4, -3)$ における接線の方程式を求めてください。

問題 13.2 $F(x, y) = (x^2 + 2y)^2 - 4x^2(x - 2)(x + y)$ とするとき、以下の問いに答えて下さい。

- (1) $F(x, y)$ の偏導関数を求めて下さい。
 (2) $x = 0$ のとき、 $x = 2$ のとき、あるいは $x + y = 0$ のときに F_x が 0 であることを確認して下さい。もしそうでなかったなら、(1) の計算を間違えたと言うことになりますのでやり直して下さい。

(3) 曲線 $F(x, y) = 0$ 上の特異点、つまり、連立方程式:

$$\begin{cases} F_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$$

を満たす点を全て求めて下さい。

問題 13.3 $G(x, y) = x^2 - 5y^2 - 1$ とするとき、曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 $(9, -4)$ における接線の方程式を求めて下さい。

問題 13.4 方程式 $x^2(x+3) = y^2$ の表す曲線について以下の問いに答えて下さい。

- (1) 曲線上の点 $(1, 2)$ における接線の方程式を求めて下さい。
 (2) この曲線の特異点を求めて下さい。なければならないと答えて下さい。

問題 13.5 曲線 $y = 4x^2$ 上の点 $(c, 4c^2)$ における接線と法線の方程式 (あるいはパラメータ表示された方程式) を求めて下さい。