

14 総復習

14.1 2021 S/S

問題 14.1 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在する場合はその値を求めてください：

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x + 2y} \quad (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y + y^5}{x^2 + 3y^4}$$

問題 14.2 次の関数の偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求めてください：

$$(1) f(x, y) = (x^2 - 2y)^{23} \quad (2) f(x, y) = \log(xy^3)$$

$$(3) f(x, y) = (\sin x)(\tan y) \quad (4) f(x, y) = 2^{x+2y}$$

問題 14.3 次の関数の、2次までの偏導関数を全て求めてください：

$$(1) f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 5x - 2y \quad (2) f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

$$(3) f(x, y) = e^{-2x} \cos 5y$$

問題 14.4 $F(x, y) = (x + y + 1)^2 - x(x - 3)^2$ のとき、方程式 $F(x, y) = 0$ の定める曲線について以下の問いに答えてください：

(1) 特異点があれば求めてください。

(2) 曲線 $F(x, y) = 0$ 上の点 $(4, -3)$ における接線の方程式を求めてください。

問題 14.5 次の場合に以下の問いに答えてください：

$$z = \frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \frac{13}{4}y^2, \quad x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}v - w), \quad y = \frac{1}{2}(v + \sqrt{3}w)$$

(1) z の v, w についての偏導関数 z_v, z_w を求めてください。

(2) z の v, w についての2次の偏導関数 $z_{vv}, z_{vw}(=z_{wv}), z_{ww}$ を求めてください。

問題 14.6 (1) e^x の、 $x = 0$ の周りでの Taylor 展開を求めてください。ただし、展開が可能であることは既知とします。

(2) (1) で求めた展開式の4次の項までの和を近似値として e の近似値を求めてください。ただし、近似値は小数第4位を四捨五入して小数第3位まで求め、誤差は評価する必要はありません。

問題 14.7 次の正項級数が収束するかどうか判定してください。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{50}}{50^n} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{50^n}$$

14.2 2016 S/S

問題 14.8 $F(x, y) = (x^2 + 2y)^2 - 4x^2(x - 2)(x + y)$ とするとき、以下の問いに答えて下さい。

(1) $F(x, y)$ の偏導関数を求めて下さい。

(2) $x = 0$ のとき、 $x = 2$ のとき、あるいは $x + y = 0$ のときに F_x が 0 であることを確認して下さい。もしそうでなかったなら、(1) の計算を間違えたと言うことになりますのでやり直して下さい。

(3) 曲線 $F(x, y) = 0$ 上の特異点、つまり、連立方程式：

$$\begin{cases} F_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$$

を満たす点を全て求めて下さい。

問題 14.9 $G(x, y) = x^2 - 5y^2 - 1$ とするとき、曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 $(9, -4)$ における接線の方程式を求めて下さい。

問題 14.10 次の極限値が存在するかどうか調べて下さい。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

問題 14.11 $C(x, y) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2x) - y^2$ において $x = r \cos t, y = r \sin t$ としたときに C を r, t の関数と考えて偏導関数 C_r, C_t を求めて下さい。

問題 14.12 関数 $w(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ に対して $w_{xx} + w_{yy} = 0$ を示して下さい。

問題 14.13 関数 $f(x) = \sin x$ の、原点での Taylor 展開を求めて下さい。ただし、展開の可能性は既知とします。

一般項はなくても構いませんが、少なくとも最初の0でない3項は具体的に書いて下さい（その後は『+...』で結構です）。

問題 14.14 関数 $p(x) = \tan^{-1} x$ に対して3次の項までの和を近似値とし、誤差項が4次の Taylor の定理を原点のまわりで適用し、 $\tan^{-1} \frac{1}{2}$ の近似値とその誤差の限界を求めて下さい。

問題 14.15 次のべき級数の収束半径を求めて下さい：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$$

14.3 2015 S/S

問題 14.16 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

問題 14.17 等比級数（幾何級数）の和の公式を使って関数 $\frac{2}{x+1}$ を $x=0$ のまわりでべき級数に展開して下さい。

問題 14.18 次の各関数の指定された点のまわりでのテイラー展開を求めて下さい。その際一般項も必ず求めて下さい。ただし展開が可能である事は既知とします。

- (1) $f(x) = \cos x$, $x=0$ のまわりで。
 (2) $g(x) = \log x$, $x=1$ のまわりで。

問題 14.19 $h(x) = \sqrt[3]{1+x}$ に対して 2 次の項までを近似値とするテイラーの定理を適用し、 $\sqrt[3]{2}$ の近似値を求め、そのときの誤差の限界も求めて下さい。

問題 14.20 次の極限值：

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + 3y^2}$$

が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

問題 14.21 次の各関数の 2 次までの偏導関数を求めて下さい。

$$(1) w(x, y) = \log(x^2 y) \quad (2) v(x, y) = (x^2 + y)^3$$

問題 14.22 次の各合成関数の導関数あるいは偏導関数を求めて下さい。

$$(1) a(x, y) = x^2 - 3y^2, \quad x = \cos t, \quad y = 2 \sin t$$

$$(2) b(x, y) = \sin(x^2 + y^2), \quad x = v + w, \quad y = vw$$

問題 14.23 方程式 $x^2(x+3) = y^2$ の表す曲線について以下の問いに答えて下さい。

- (1) 曲線上の点 $(1, 2)$ における接線の方程式を求めて下さい。
 (2) この曲線の特異点を求めて下さい。なければないと答えて下さい。

14.4 2013 S/S

問題 14.24 関数 $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ の $x=0$ の周りでのテイラー展開（つまり、マクローリン展開）を求めて下さい。

ただし、展開が可能であることは既知とします。

問題 14.25 関数 $f(x) = \sqrt{1+x}$ に対して $x=0$ の周りでの誤差が 3 次の Taylor の定理を使って、 $\sqrt{2}$ の近似値とそれの場合の誤差の限界（誤差の絶対値を上から評価したもの）を求めて下さい。

問題 14.26 次の極限值：

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$$

が存在するかどうか調べ、存在するならその極限值も求めて下さい。

問題 14.27 関数 $m(x, y) = x^2 e^{x+y}$ の 2 階までの偏導関数を全て求めて下さい。

問題 14.28 関数 $k(x, y) = 2x^2 + 3xy - y^2$ に対して、 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ としたときに k_r, k_θ (k を r, θ 変数の関数と見た時の偏導関数) を求めて下さい。

問題 14.29 曲線 $y = 4x^2$ 上の点 $(c, 4c^2)$ における接線と法線の方程式（あるいはパラメータ表示された方程式）を求めて下さい。

14.5 2012 S/S

問題 14.30 ダランベールの判定法によって正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{500}}{3^n}$ の収束／発散を判定して下さい。

問題 14.31 $\log(1+x)$ の $x=0$ の周りでのテイラー展開を求めて下さい。

ただし、展開が可能であることは既知とします。

問題 14.32 $f(x) = \sqrt{1+x}$ の $x=3$ でのテイラー展開の 5 次の項までを求め、これを利用して $\sqrt{3}$ の近似値を小数点以下 5 桁まで（6 桁以下切り捨て）求めて下さい。

ただし、展開が可能であることは既知とします。

問題 14.33 次の極限值：

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

が存在するかどうか調べ、存在するならその極限值も求めて下さい。

問題 14.34 関数 $w(x, y) = (x^3 + y)^4$ の 2 階までの偏導関数を全て求めて下さい。

問題 14.35 $a(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ 、 $b(t) = \frac{1}{2}(v^2 - w^2)$ 、 $c(t) = vw$ であるときに

$$A(v, w) = a(b(v, w), c(v, w))$$

で定義される合成関数 $A(v, w)$ の 1 階の偏導関数を求めて下さい。

問題 14.36 曲線 $F(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) におけるこの曲線の法線方向ベクトルは

$$\text{grad}F(a, b) = \begin{pmatrix} F_x(a, b) \\ F_y(a, b) \end{pmatrix}$$

で与えられることを、曲線の上を動く点の運動 $(x(t), y(t))$ を使って大まかに説明して下さい。ただし、点 (a, b) は特異点ではないとします。

14.6 2011 S/S

問題 14.37 等比級数の和の公式を使うことによって関数 $\frac{1}{2-x}$ を x のべき級数で表して下さい。

問題 14.38 べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ の収束半径を求めて下さい。

問題 14.39 (1) 関数 $f(x) = \log(1+x)$ の、 $x=0$ でのテイラー展開を求めて下さい。ただし、展開が可能であることは既知として下さい。

(2) 同じ関数 $f(x) = \log(1+x)$ に対してテイラーの定理を $n=2$ のとき (2 次の項までの和が近似値、3 次の項が誤差) に適用して $\log \frac{3}{2}$ の近似値を求めて下さい。

更にその時の誤差の絶対値がどの程度であるかも評価して下さい。

問題 14.40 次の極限值：

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^4 + y^4}$$

が存在するかどうか調べ、存在するならその極限值も求めて下さい。

問題 14.41 関数 $w(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ の 2 階までの偏導関数を全て求めて下さい。

問題 14.42 $a(x, y) = x^2 + 3y^2$ 、 $b(t) = 2 \sin t$ 、 $c(t) = \cos t$ であるときに

$$A(t) = a(b(t), c(t))$$

で定義される合成関数 $A(t)$ の導関数を求めて下さい。

問題 14.43 曲線 $F(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) におけるこの曲線の法線方向ベクトルは

$$\text{grad}F(a, b) = \begin{pmatrix} F_x(a, b) \\ F_y(a, b) \end{pmatrix}$$

で与えられることを、曲線の上を動く点の運動 $(x(t), y(t))$ を使って大まかに説明して下さい。ただし、点 (a, b) は特異点ではないとします。

14.7 2010 S/S

問題 14.44 xy -平面全体で定義された関数 $f(x, y)$ が、点 (a, b) に於いて x に関して偏微分可能であるとはどう云う事ですか。その定義を書いて下さい。

問題 14.45 次の極限值が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + 2y^4} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3}{x^3 - y^3} \quad (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

問題 14.46 次の関数の 1 次・2 次の偏導関数を求めて下さい。ただし、 $g_{xy} = g_{yx}$ など は成り立ちますので、2 次偏導関数は 3 種のみで結構です。

$$(1) g(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(2) h(x, y) = xy^3 + 2x^2y^2 + 9x^3$$

$$(3) k(x, y) = \cos(2x - y)$$

問題 14.47 次の関数について 1 次の偏導関数 $m_x(x, y)$ 、 $m_y(x, y)$ を求めて下さい。

$$m(x, y) = \begin{cases} x \tan^{-1} \frac{y}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

問題 14.48 $p(x, y) = x^2 + 2y^2$ 、 $r(t) = 4 \cos t$ 、 $v(t) = 3 \sin t$ を、関係式 $x = r(t)$ 、 $y = v(t)$ によって合成して得られる関数 $w(t) = p(r(t), v(t))$ の導関数を求めて下さい。

課題 第 5 回

以下の問題を、自分自身で考えて答えて下さい：

課題 5.1 問題 14.44、14.43、14.16、14.45、14.41、14.11

出題：7 月 18 日

出席者用提出期限：7 月 18 日講義終了時（紙媒体・手渡しのみ）

欠席者用提出期限：7 月 25 日 17 時 00 分 00 秒（画像ファイル・オンラインのみ）

Taylor 級数と近似値計算・誤差の評価 重要事項 まとめ

事実 14.1 [等比級数の和]

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1)$$

定理 14.2 [d'Alembert's ratio test] $\sum p_n$: 正項級数とします。

(i) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n}$ が有限値として存在するとき (その値を L として)、

(ia) $0 \leq L < 1$ ならば $\sum p_n$ は収束し、

(ib) $1 < L < \infty$ ならば $\sum p_n$ は $+\infty$ に発散します。

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \infty$ であるときは $\sum p_n$ は $+\infty$ に発散します。

事実 14.3 [収束半径] べき級数 $\sum p_n(x-a)^n$ は (十分大きな n について) $p_n \neq 0$ であるとして。このとき極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_n}{p_{n+1}} \right|$$

が有限値として、あるいは $+\infty$ に発散の意味で存在する時、その値が収束半径に他なりません。

定義 14.4 [Taylor 展開] 関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで $x - a$ のべき級数に展開されるならば、それは

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

の形でなければならず、これを $f(x)$ の $x = a$ のまわりでの Taylor 展開と言います。

定理 14.5 [Rolle の定理 (M.Rolle 1691)]

前提条件: (i) $f(x)$ は $[a, b]$ で連続

(ii) $f(x)$ は (a, b) で微分可能

(iii) $f(a) = f(b)$

主張内容: $f'(c) = 0$ となる点 c が $a < c < b$ の範囲内にある

定理 14.6 [平均値の定理 (B.Cavalieri 1635, J.-L.Lagrange 1801)]

前提条件: (i) $f(x)$ は $[a, b]$ で連続

(ii) $f(x)$ は (a, b) で微分可能

主張内容: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ となる点 c が $a < c < b$ の範囲内にある

定理 14.7 [Cauchy の平均値の定理 (A.L.Cauchy 1823)]

(本質的な) 前提条件 (i) $f(x), g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続

(ii) $f(x), g(x)$ は开区間 (a, b) で微分可能

(技術的な) 前提条件 (iii) $a < x < b$ で $g'(x) \neq 0$

主張内容 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ となるような c が $a < c < b$ の範囲に少なくとも1つ存在します

定理 14.8 [Taylor の定理] $f(x)$ が何回でも微分出来るとき、任意の $a \neq b$ と任意の正の整数 n に対して

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(b-a)^n}_{\text{近似値}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在する。