

15 接平面と全微分

15.1 全微分

1 変数関数の微分係数の定義を振り返って良く見ると：

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v) - f(a)}{v - a} = f'(a)$$

ですから、変形すると

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v) - \{f(a) + f'(a)(v - a)\}}{v - a} = 0$$

と書くことが出来ます。これはつまり

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v) - f_1(v)}{v - a} = 0$$

が成り立つような1次関数 $f_1(x)$ が存在すると云う事ですが、極限値が0なので実は

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{|f(v) - f_1(v)|}{|v - a|} = 0 \quad (15.1)$$

としても同じことです。

実は1次関数 $f_1(x) = p(x - a) + q$ が上式 (15.1) を満たすならば、まず

$$|f(v) - p(v - a) - q| = \left| \frac{f(v) - p(v - a) - q}{v - a} \right| |v - a| \rightarrow 0 \quad (v \rightarrow a)$$

ですから $q = \lim_{v \rightarrow a} f(v)$ でなければなりません。 $f(x)$ が連続であることを仮定すれば $q = f(a)$ です。そうすると

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{v \rightarrow a} \left| \frac{f(v) - p(v - a) - f(a)}{v - a} \right| = \lim_{v \rightarrow a} \left| \frac{f(v) - f(a)}{v - a} - p \right| \\ p &= \lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v) - f(a)}{v - a} = f'(a) \end{aligned}$$

であることも分かります。

以上から式 (15.1) を満たす1次関数 $f_1(x)$ は $f_1(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ だけであることが分かります。丁度直線 $y = f_1(x)$ が曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ での接線になっていますね。

この事を踏まえて2変数の場合を考えると、 $|(v, w) - (a, b)|$ はベクトルの大きさと考えられ、

$$\lim_{(v, w) \rightarrow (a, b)} \frac{|f(v, w) - f_1(v, w)|}{\sqrt{(v - a)^2 + (w - b)^2}} = 0 \quad (15.2)$$

となるような“1次関数” $f_1(x, y)$ の存在を考えると云う事になります。

仮に $f_1(x, y) = p(x - a) + q(y - b) + r$ が (15.2) を満たすと仮定すると $(v, w) \rightarrow (a, b)$ のとき

$$\begin{aligned} &|f(v, w) - r - p(v - a) - q(w - b)| \\ &= \left| \frac{f(v, w) - f(a, b) - p(v - a) - q(w - b)}{\sqrt{(v - a)^2 + (w - b)^2}} \right| \sqrt{(v - a)^2 + (w - b)^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となって $f(x, y)$ の連続性を仮定すれば $r = f(a, b)$ でなければなりません。こうした事情から、

定義 15.1 適当な定数 p, q が存在して

$$\lim_{(v, w) \rightarrow (a, b)} \frac{f(v, w) - f(a, b) - p(v - a) - q(w - b)}{\sqrt{(v - a)^2 + (w - b)^2}} = 0$$

となるとき、 $f(x, y)$ は (a, b) において全微分可能であると言います。

もしも $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能であるならば、分母の極限が0なので分子の極限も0でなければならず、 $f(x, y)$ は連続です。

また極限計算において $w = b, v \rightarrow a$ の場合を考えれば

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v, b) - f(a, b) - p(v - a)}{|v - a|} = 0$$

であり、極限値が0なので特に

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v, b) - f(a, b) - p(v - a)}{v - a} = 0$$

であることも分かれますから、

$$\begin{aligned} \frac{f(v, b) - f(a, b)}{v - a} &= \frac{f(v, b) - f(a, b) - p(v - a) + p(v - a)}{v - a} \\ &= \frac{f(v, b) - f(a, b) - p(v - a)}{v - a} + p \rightarrow p \quad (\text{as } v \rightarrow a) \end{aligned}$$

となり、実は $f(x, y)$ は点 (a, b) において変数 x に関して偏微分可能であって、 $p = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ である事が分かります。全く同様に $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ でもありますから、全微分の定義に現れた係数 p, q は実は偏微分係数だった事が分かります。

事実 15.2 $f(x, y)$ が点 (a, b) において全微分可能であるとき、 $f(x, y)$ は点 (a, b) において連続かつ偏微分可能であり、

$$\lim_{(v, w) \rightarrow (a, b)} \frac{f(v, w) - f(a, b) - f_x(a, b)(v - a) - f_y(a, b)(w - b)}{\sqrt{(v - a)^2 + (w - b)^2}} = 0$$

です。

一般には偏微分可能だからと言って全微分可能とは限りませんが、 C^1 級であれば全微分可能であることが知られています。

定義 15.3 全ての変数に関して偏微分可能であって、(0 次から) n 次までの各偏導関数が全て連続である関数は C^n 級関数であると言います。

15.2 接平面

またここに現れる 1 次関数：

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ &= f(a, b) + \text{grad} f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

によって定まる平面 $z = f_1(x, y)$ を、曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面と言います。

定義 15.4 $f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能であるとき、次式の定める平面：

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

を、曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面と言います。

15.3 Taylor 展開

C^∞ -級の 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して

$$F(t) = f(a + tv, b + tw)$$

と置いて、 $F(t)$ を $t = 0$ で Taylor 展開し、2 次の項まで具体的に計算してみると、

$$F(t) = f(a + tv, b + tw)$$

$$F(0) = f(a, b)$$

$$F'(t) = f_x(a + tv, b + tw)v + f_y(a + tv, b + tw)w$$

$$F'(0) = f_x(a, b)v + f_y(a, b)w$$

$$F''(t) = f_{xx}(a + tv, b + tw)v^2 + 2f_{xy}(a + tv, b + tw)vw + f_{yy}(a + tv, b + tw)w^2$$

$$F''(0) = f_{xx}(a, b)v^2 + 2f_{xy}(a, b)vw + f_{yy}(a, b)w^2$$

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} f(a + tv, b + tw) &= f(a, b) + \{f_x(a, b)v + f_y(a, b)w\}t \\ &\quad + \frac{1}{2}\{f_{xx}(a, b)v^2 + 2f_{xy}(a, b)vw + f_{yy}(a, b)w^2\}t^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a + v, b + w) &= f(a, b) + \{f_x(a, b)v + f_y(a, b)w\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\{f_{xx}(a, b)v^2 + 2f_{xy}(a, b)vw + f_{yy}(a, b)w^2\} + \dots \\ &= f(a, b) + \text{grad} f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \dots$$

となるので、 $a + v = x, b + w = y$ と書き直せば

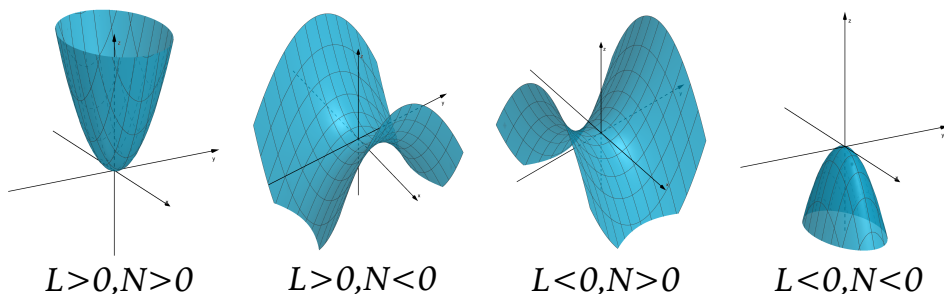
$$\begin{aligned} f(x, y) &= \underbrace{f(a, b) + \text{grad} f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}}_{\text{接平面を定める 1 次式}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - a & y - b \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}}_{\text{Hesse 行列}} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

が得られます。ここで1次の項までの部分は接平面を定める1次式になっており、その接平面との差のトップタームが Hesse 行列によって記述されます。

分かりやすくするために $(a, b) = (0, 0)$ の場合に、この接平面との差を見てみましょう（3次以上は誤差）。Hesse 行列は対称行列なので、直交行列によって対角化されます。直交行列は単位固有ベクトルを並べたものであって、回転行列になるように取ることができますので、もともと対角行列であった場合を考えても（方向が違っただけ）大差はありません。

（対角成分である）固有値の符号によって分類すると次のようになっています：

$$z = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Lx^2 + Ny^2$$



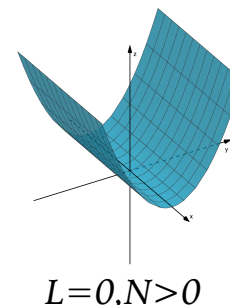
もしも $f(x, y)$ が原点で極値ならば、接平面は水平になっていると考えられますから、今見た『接平面との差』がそのまま関数の増減の様子に一致しているでしょう。接平面が水平であるのは $f_x = f_y = 0$ の場合であり、 $\text{grad} f = \mathbf{0}$ と表すことができます。

その上で、2つの固有値が同符号であれば極大もしくは極小値であり、異符号であれば極値ではないことが上の図から見て取れますが、これは固有値の積が正であるか負であるかということであり、行列式が固有値の積であることを考えれば Hesse 行列の行列式（これを Hessian と言います）：

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

によって極値かどうか判定されるであろうことが理解出来ます。

固有値が 0 を含む場合は、



などのようになりますが、固有値が2つとも 0、つまり Hesse 行列がゼロ行列の場合は Taylor 展開の3次以降を見なければなりません。

Exercise

基本演習 1 次の関数 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ の原点での全微分可能性を調べて下さい。

基本演習 2 $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ のグラフ上の点 $(1, 0, 1)$ における接平面を求めてください。

基本演習 3 $z = f(x, y) = xy$ 上の次の各点における接平面の方程式を求めてください：

- (1) $(1, 1, 1)$, (2) $(1, 2, 2)$.

基本演習 4 曲面 $z = x^3y + 4xy^2$ 上の点 $(1, -1, 3)$ における接平面の方程式を求めてください。

基本演習 5 (1) 曲面 $z = f(x, y) = xy + 3xy^2$ 上の点 $(1, 1, 4)$ における接平面の方程式を求めてください。

(2) 接平面が水平 (xy -平面と平行) である点を求め、その点での $f(x, y)$ の Hesse 行列を求めてください。