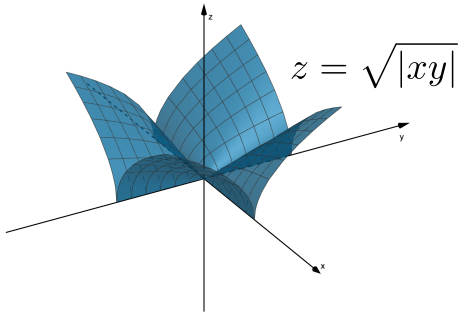
15　接平面と全微分

Exercise 解答

基本演習 1 次の関数：

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$

の原点での全微分可能性を調べて下さい。



$(x,y)\neq(0,0)$ のとき、

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-px-qy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{|xy|}-px-qy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ですが、x 軸に平行に近付く場合は

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-px-qy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-px}{|x|}$$

ですから、$p=0$ のとき極限値は存在して 0 ですが、そうでなければ近づく向きによって収束値が異なるため、極限値は存在しません。同様に y 軸に平行に近付く場合は

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-px-qy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-qy}{|y|}$$

ですから全微分可能であるためには $q=0$ でなければなりません。

では $p=q=0$ の場合はどうかと言うと、直線 $y=x$ に沿って近づくと

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-px-qy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|x|}{\sqrt{2}|x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となっており、近づけ方によって収束値が異なることが分かります。従ってこの関数は原点では全微分可能ではありません。 □

基本演習 2 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ のグラフ上の点 $(1,0,1)$ における接平面を求めてください。

$$f_x=2x,\quad f_y=2y\qquad f_x(1,0)=2,\quad f_y(1,0)=0$$

であり、接平面の式は

$$z=1+2(x-1)+0(y-0)\quad \text{すなわち}\quad 2x-z-1=0$$

です。 □

基本演習 3 $z=f(x,y)=xy$ 上の次の各点における接平面の方程式を求めてください：

(1) $(1,1,1)$,　　(2) $(1,2,2)$.

(1) $z=x+y-1$.　　(2) $z=2x+y-2$. □

基本演習 4 曲面 $z=x^3y+4xy^2$ 上の点 $(1,-1,3)$ における接平面の方程式を求めてください。

$x-7y-z-5=0$. □

基本演習 5 (1) 曲面 $z=f(x,y)=xy+3xy^2$ 上の点 $(1,1,4)$ における接平面の方程式を求めてください。

(2) 接平面が水平（xy-平面と平行）である点を求め、その点での $f(x,y)$ の Hesse 行列を求めてください。

(1)

$$f_x = y + 3y^2, \quad f_y = x + 6xy$$

ですから、点 $(1, 1, 4)$ での接平面は

$$4x + 7y - z - 7 = 0$$

です。

(2) 接平面が xy-平面と平行であるのは $f_x = f_y = 0$ となる点においてであって、それは連立方程式：

$$\begin{cases} y(1 + 3y) = 0 \\ x(1 + 6y) = 0 \\ z = xy + 3xy^2 \end{cases}$$

を解けば良く、$(0, 0, 0), \left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$ の 2 点です。

一般に Hesse 行列 H は

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + 6y \\ 1 + 6y & 6x \end{pmatrix}$$

ですから、

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H\left(0, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

です。 □