15　接平面と全微分

■今日の講義内容
全微分 接平面 Hesse 行列
■講義中にやらなければならない事
基本演習 5
■講義終了後やらなければならない事
今日の講義全体を振り返り（特に話の流れに留意して）内容を把握し直すこと。

重要事項

定義 15.1 全ての変数に関して偏微分可能であって、(0 次から) n 次までの各偏導関数が全て連続である関数は C^n 級関数であると言います。

全微分

定義 15.2 適当な定数 p, q が存在して

$$\lim_{(v,w)\to(a,b)} \frac{f(v,w)-f(a,b)-p(v-a)-q(w-b)}{\sqrt{(v-a)^2+(w-b)^2}} = 0$$

となるとき、$f(x,y)$ は (a,b) において全微分可能であると言います。

事実 15.3 $f(x,y)$ が点 (a,b) において全微分可能であるとき、$f(x,y)$ は点 (a,b) において連続かつ偏微分可能であり、

$$\lim_{(v,w)\to(a,b)} \frac{f(v,w)-f(a,b)-f_x(a,b)(v-a)-f_y(a,b)(w-b)}{\sqrt{(v-a)^2+(w-b)^2}} = 0$$

です。

一般には偏微分可能だからと言って全微分可能とは限りませんが、C^1 級であれば全微分可能であることが知られています。

接平面

事実 15.4 $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であるとき、曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面は

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

です。

Taylor 展開

C^∞-級の２変数関数 $f(x,y)$ に対して

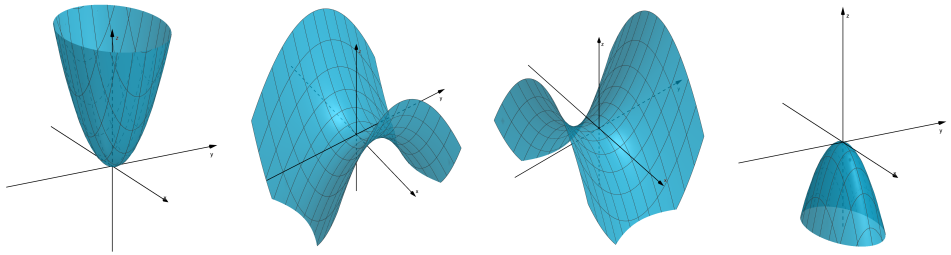
$$f(x,y) = \underbrace{f(a,b) + \mathrm{grad} f(a,b) \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}}_{\text{接平面を定める１次式}} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}}_{\text{Hesse 行列}} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \cdots$$

が得られます。ここで１次の項までの部分は接平面を定める１次式になっており、その接平面との差のトップタームが Hesse 行列によって記述されます。

分かりやすくするために $(a,b) = (0,0)$ の場合に、この接平面との差を見てみましょう（３次以上は誤差）。Hesse 行列は対称行列なので、直交行列によって対角化されます。直交行列は単位固有ヴェクターを並べたものであって、回転行列になるように取ることができますので、もともと対角行列であった場合を考えても（方向が違うだけで）大差はありません。

（対角成分である）固有値の符号によって分類すると次のようになっています：

$$z = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Lx^2 + Ny^2$$



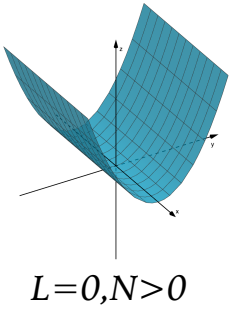
もしも $f(x,y)$ が原点で極値ならば、接平面は水平になっていると考えられますから、今見た『接平面との差』がそのまま関数の増減の様子に一致しているでしょう。接平面が水平であるのは $f_x = f_y = 0$ の場合であり、$\mathrm{grad} f = \mathit{0}$ と表すことが出来ます。

その上で、２つの固有値が同符号であれば極大もしくは極小値であり、異符号であれば極値ではないことが上の図から見て取れますが、これは固有値の積が正であるか負であるかということであり、行列式が固有値の積であることを考えれば Hesse 行列の行列式（これを Hessian と言います）：

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

によって極値かどうかが判定されるであろうことが理解出来ます。

固有値が 0 を含む場合は図のようになりますが、固有値が２つとも 0、つまり Hesse 行列がゼロ行列の場合は Taylor 展開の３次以降を見なければならないでしょう。



Exercise

基本演習 1 関数 $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ の原点での全微分可能性を調べて下さい。

基本演習 2 $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ のグラフ上の点 $(1,0,1)$ における接平面を求めてください。

基本演習 3 $z = f(x,y) = xy$ 上の次の各点における接平面の方程式を求めてください：
(1) $(1,1,1)$,　(2) $(1,2,2)$.

基本演習 4 曲面 $z = x^3y + 4xy^2$ 上の点 $(1,-1,3)$ における接平面の方程式を求めてください。

基本演習 5 (1) 曲面 $z = f(x,y) = xy + 3xy^2$ 上の点 $(1,1,4)$ における接平面の方程式を求めてください。
(2) 接平面が水平（xy-平面と平行）である点を求め、その点での $f(x,y)$ の Hesse 行列を求めてください。