1 等比級数の和の公式を使って、関数 $\dfrac{1}{x-9}$ を $x=2$ のまわりでべき級数展開してください。

配点：10 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】 変形すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-9} &= \frac{1}{x-2-7}\\ &= -\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-2}{7}}\end{aligned}$$

ですから、$\left|\frac{x-2}{7}\right|<1$ すなわち $-5<x<9$ のとき、等比級数の和の公式から

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{7}\left\{1+\left(\frac{x-2}{7}\right)+\left(\frac{x-2}{7}\right)^2+\cdots\right\}\\ &= -\frac{1}{7}-\frac{1}{7^2}(x-2)-\frac{1}{7^3}(x-2)^2-\cdots\end{aligned}$$

と展開されます。 □

2 ダランベールの判定法を使って次の正項級数が収束するかどうか判定してください：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{2n}}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

配点：(1)15 点、(2)10 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1) $n\to\infty$ のとき、

$$\frac{\frac{n+1}{3^{2n+2}}}{\frac{n}{3^{2n}}}=\frac{n+1}{9n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{9}\to\frac{1}{9}<1$$

ですから、ダランベールの判定法により、この正項級数は収束します。

(2) $n\to\infty$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} &= \frac{(n+1)!\cdot n^n}{n!\cdot(n+1)^{n+1}}\\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n}\\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}\\ &= \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{-1}\\ &\to \mathrm{e}^{-1}<1\end{aligned}$$

ですから、ダランベールの判定法により、この正項級数は収束します。

□

3 次のべき級数の収束半径を求めてください：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10}{2^n}(x-2)^n$

配点：(1)15 点、(2)10 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　(1)

$$\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \frac{n+1}{n} \to 1 \quad (n\to\infty)$$

従って収束半径は 1 です。

(2)

$$\left|\frac{\frac{10}{2^n}}{\frac{10}{2^{n+1}}}\right| = 2 \to 2 \quad (n\to\infty)$$

従って収束半径は 2 です。　□

4 次の関数を指定された点の周りでテイラー展開してください：

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{2x+1},\quad x=0$

(2) $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2},\quad x=1$

ただし、いずれの場合も展開可能であることは既知とし、展開式は最初の０でない３項程度を求め、その後は『$+\cdots$』としてください（一般項は必要ありません）。

配点：各 10 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】　(1) 微分計算によれば

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{2x+1} & f(0) &= \mathrm{e} \\ f'(x) &= 2\mathrm{e}^{2x+1} & f'(0) &= 2\mathrm{e} \\ f''(x) &= 4\mathrm{e}^{2x+1} & f''(0) &= 4\mathrm{e} \\ f^{(3)}(x) &= 8\mathrm{e}^{2x+1} & f^{(3)}(0) &= 8\mathrm{e} \end{aligned}$$

ですから展開式は以下の通りです：

$$f(x) = \mathrm{e} + 2\mathrm{e}x + 2\mathrm{e}x^2 + \frac{4\mathrm{e}}{3}x^3 + \cdots$$

(2)
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \qquad f(1) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1+x^2 - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \qquad f'(1) = 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)4x}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3} \\ f''(1) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= \frac{(6x^2-6)(1+x^2)^3 - (2x^3-6x)3(1+x^2)^2(2x)}{(1+x^2)^6} \\ &= \frac{(6x^2-6)(1+x^2) - (2x^3-6x)(6x)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{-6x^4+36x^2-6}{(1+x^2)^4} \\ f^{(3)}(1) &= \frac{24}{2^4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \frac{(-24x^3+72x^2)(1+x^2)^4 - (-6x^4+36x^2-6)4(1+x^2)^3(2x)}{(1+x^2)^8} \\ &= \frac{(-24x^3+72x^2)(1+x^2) + 8x(6x^4-36x^2+6)}{(1+x^2)^5} \\ f^{(4)}(1) &= \frac{(-24+72)2 + 8(6-36+6)}{2^5} \\ &= -\frac{96}{2^5} \\ &= -3 \end{aligned}$$

ですから展開式は以下の通りです：

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(x-1)^3 - \frac{1}{8}(x-1)^4 + \cdots$$

□

5 4 次の項までを近似値とし、誤差項が 5 次のテイラーの定理を利用して、Napier 数 e の近似値とそのときの誤差の限界を求めてください。ただし、近似値と誤差の限界は、それぞれ正確な値を分数で表したものと、割り算を実行して小数点以下 4 桁まで求めたものの両方を書いてください。なお、$\mathrm{e} < 3$ であることは既知とします。

配点：15 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】　$f(x) = \mathrm{e}^x$ とすると、任意の正の整数 n に対して $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ ですから、任意の $b \neq 0$ に対して

$$\begin{aligned} f(b) &= f(0) + f'(0)b + \frac{f''(0)}{2!}b^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}b^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}b^4 + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}b^5 \\ \mathrm{e}^b &= 1 + b + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{6}b^3 + \frac{1}{24}b^4 + \frac{\mathrm{e}^c}{120}b^5 \end{aligned}$$

となるような c が b と 0 の間に存在します。従って $b=1$ とすれば

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{\mathrm{e}^c}{120}$$

となるような c が 1 と 0 の間に存在します。

右辺の最初の５項の和を近似値とすれば

$$(\text{近似値}) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24} = 2.7083\ldots$$

であり、この場合の誤差の限界は

$$\left|(\text{誤差})\right| = \frac{\mathrm{e}^c}{120} < \frac{\mathrm{e}}{120} < \frac{3}{120} = \frac{1}{40} = 0.0250$$

です。　□

6 毎年一定の割合で所得が増加していくと仮定します。例えば当初の所得が m、毎年 3 %の増加であれば、1 年後の所得は $m \cdot 1.03$、2 年後の所得は $(m \cdot 1.03) \cdot 1.03$ です。

20 年後に所得が当初の 2 倍になるためには毎年の所得増加は何%であれば良いでしょうか。3 次の項までを近似値とするテイラーの定理を利用して、増加率の近似値を計算してください。誤差の評価計算は不要です。

配点：5 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】　所得が毎年 p %増加していけば、20 年後には当初の $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{20}$ 倍になりますから、これが 2 倍になる、つまり

$$1+\frac{p}{100}=2^{\frac{1}{20}}$$

となるような p を求めればよく、$2^{\frac{1}{20}}$ の近似値を計算すれば良いことが分かります。

$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{20}}$ と置けば、

$$f'(x)=\frac{1}{20}(1+x)^{-\frac{19}{20}}, \quad f''(x)=-\frac{19}{20^2}(1+x)^{-\frac{39}{20}}, \quad f^{(3)}(x)=\frac{19\cdot 39}{20^3}(1+x)^{-\frac{59}{20}}$$

であって、テイラーの定理によれば

$$\begin{aligned}
2^{\frac{1}{20}} = f(1) &\approx f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{f''(0)}{2!}(1-0)^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}(1-0)^3 \\
&= 1+\frac{1}{20}-\frac{19}{2\cdot 20^2}+\frac{19\cdot 39}{6\cdot 20^3} \\
&= 1+\frac{1}{20}-\frac{19}{2\cdot 20^2}+\frac{19\cdot 13}{2\cdot 20^3} \\
&= 1+\frac{800-380+247}{16000} \\
&= 1+\frac{667}{16000} \\
&\approx 1.04169
\end{aligned}$$

と近似されます。従って毎年の増加が 4.17 %であれば良いことが分かります。　□

あるいは、$g(x)=x^{\frac{1}{20}}$ と置けば、

$$g'(x)=\frac{1}{20}x^{-\frac{19}{20}}, \quad g''(x)=-\frac{19}{20^2}x^{-\frac{39}{20}}, \quad g^{(3)}(x)=\frac{19\cdot 39}{20^3}x^{-\frac{59}{20}}$$

であって、テイラーの定理によれば

$$\begin{aligned}
2^{\frac{1}{20}} = g(2) &\approx g(1)+g'(1)(2-1)+\frac{g''(1)}{2!}(2-1)^2+\frac{g^{(3)}(1)}{3!}(2-1)^3 \\
&= 1+\frac{1}{20}-\frac{19}{2\cdot 20^2}+\frac{19\cdot 39}{6\cdot 20^3} \\
&= 1+\frac{1}{20}-\frac{19}{2\cdot 20^2}+\frac{19\cdot 13}{2\cdot 20^3} \\
&= 1+\frac{800-380+247}{16000} \\
&= 1+\frac{667}{16000} \\
&\approx 1.04169
\end{aligned}$$

と近似されます。従って毎年の増加が 4.17 %であれば良いことが分かります。　□