

1 ダランベールの判定法を使って正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n}$ が収束するかどうか判定してください。

配点：5 点 シラバス到達目標：ア

【解答例】

$$\frac{\frac{2^{-(n+1)}}{n+1}}{\frac{2^{-n}}{n}} = \frac{2^n n}{2^{n+1}(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

従ってダランベールの判定法により、この正項級数は収束します。 □

2 関数 $f(x) = \cos(3x)$ を $x = \frac{\pi}{4}$ の周りでテイラー展開してください。

ただし、展開可能であることは既知とし、展開式は最初の 0 でない 4 項を求め、その後は『+⋯』としてください（一般項は必要ありません）。

配点：5 点 シラバス到達目標：イ

【解答例】

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(3x) & f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ f'(x) &= -3\sin(3x) & f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ f''(x) &= -9\cos(3x) & f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{9}{\sqrt{2}} \\ f^{(3)}(x) &= 27\sin(3x) & f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{27}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ですから、

$$\cos(3x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{9}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{9}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots$$

と展開される事が分かります。 □

3 次の極限值が存在するかどうか調べ、存在する場合はその値を求めて下さい。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x}{x + 2y} \quad (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 y^2 - xy^5}{x^2 + y^4}$$

配点：(1)10 点、(2)10 点、(3)5 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と置けば、

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = r |\cos \theta|^2 |\sin \theta| \leq r$$

であって、不等式：

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq r$$

が得られます。

ここで $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ とすれば、右辺は 0 に収束しますから、はさみうちの原理により、問題の極限值は存在して 0 です。

(2) x 軸上（原点は除く）では関数値は

$$\frac{2x}{x + 2y} = \frac{2x}{x} = 2$$

となっており、 x -軸に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ とした場合、関数値は 2 に収束します。

一方、 y 軸上（原点は除く）では

$$\frac{2x}{x + 2y} = \frac{0}{2y} = 0$$

であって、 y -軸に沿って近づけた場合は 0 に収束しています。

このように、異なる 2 つの近づき方で収束値が異なるため、問題の極限值は存在しません。

(3)

$$\left| \frac{2x^3 y^2 - xy^5}{x^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{2x^3 y^2}{x^2 + y^4} \right| + \left| \frac{xy^5}{x^2 + y^4} \right|$$

y -軸上以外では

$$\left| \frac{2x^3 y^2}{x^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{2x^3 y^2}{x^2} \right| = |2xy^2|$$

であり、 x -軸上以外では

$$\left| \frac{xy^5}{x^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{xy^5}{y^4} \right| = |xy|$$

ですから、座標軸上以外では

$$0 \leq \left| \frac{2x^3 y^2 - xy^5}{x^2 + y^4} \right| \leq |2xy^2| + |xy|$$

が成り立っています。

また、原点を除く座標軸上では

$$\frac{2x^3 y^2 - xy^5}{x^2 + y^4} = 0$$

ですから、結局、原点以外の任意の点において不等式：

$$0 \leq \left| \frac{2x^3 y^2 - xy^5}{x^2 + y^4} \right| \leq |2xy^2| + |xy|$$

が成り立っています。

従って、はさみうちの原理によれば、問題の極限值は存在して 0 です。

□

4 次の関数が原点で偏微分可能であるかどうか調べて下さい。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y| + x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

配点：5 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^2}{|x|} - 0}{x} = \frac{x}{|x|} \rightarrow \begin{cases} +1 & (x \rightarrow +0) \\ -1 & (x \rightarrow -0) \end{cases}$$

となって極限值が存在しませんから変数 x については偏微分不可能です。

一方、

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \frac{0 - 0}{y} = 0 \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0)$$

ですから、変数 y に関しては偏微分可能であり、偏微分係数は $f_y(0, 0) = 0$ です。 □

5 次の関数の偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求めて下さい。

$$(1) f(x, y) = (x^2 + 3y)(x - 2y^2)^2 \quad (2) f(x, y) = \sin(x - 2y)$$

$$(3) f(x, y) = e^{3x-y} \quad (4) f(x, y) = \log(x + xy)$$

配点：各 5 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1)

$$f(x, y) = (x^2 + 3y)(x - 2y^2)^2$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x(x - 2y^2)^2 + (x^2 + 3y)2(x - 2y^2) \\ &= (4x^2 - 4xy^2 + 6y)(x - 2y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= 3(x - 2y^2)^2 + (x^2 + 3y)2(x - 2y^2)(-4y) \\ &= (3x - 8x^2y - 30y^2)(x - 2y^2) \end{aligned}$$

(2)

$$f(x, y) = \sin(x - 2y)$$

$$f_x(x, y) = \cos(x - 2y)$$

$$f_y(x, y) = -2 \cos(x - 2y)$$

(3)

$$f(x,y)=e^{3x-y}$$

$$f_x(x,y)=3e^{3x-y}$$

$$f_y(x,y)=-e^{3x-y}$$

6 次の関数の 2 次までの偏導関数を全て求めて下さい。

(1) $f(x,y)=2x^2-3xy-y^2-3x+5y-11$

(2) $f(x,y)=\frac{2x-y}{x+3y}$

配点：各 10 点	シラバス到達目標：ウ
-----------	------------

【解答例】 (1)

$$f(x,y)=2x^2-3xy-y^2-3x+5y-11$$

$$f_x(x,y)=4x-3y-3$$

$$f_y(x,y)=-3x-2y+5$$

$$f_{xx}(x,y)=4$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-3$$

$$f_{yy}(x,y)=-2$$

(4)

$$f(x,y)=\log(x+xy)=\log x+\log(1+y)$$

$$f_x(x,y)=\frac{1}{x}$$

$$f_y(x,y)=\frac{1}{1+y}$$

□

(2)

$$f(x,y)=\frac{2x-y}{x+3y}$$

$$f_x(x,y)=\frac{2(x+3y)-(2x-y)}{(x+3y)^2}=\frac{7y}{(x+3y)^2}$$

$$f_y(xy)=\frac{-(x+3y)-(2x-y)3}{(x+3y)^2}=\frac{-7x}{(x+3y)^2}$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{-14y}{(x+3y)^3}$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\frac{7(x+3y)^2-7y\cdot 6(x+3y)}{(x+3y)^4}=\frac{7x-21y}{(x+3y)^3}$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{42x}{(x+3y)^3}$$

□

7 (1) $f(x, y) = 3x^2 - y^2$, $g(t) = t - 1$, $h(t) = t + 1$ に対して、 $F(t) = f(g(t), h(t))$ によって定まる合成関数 $F(t)$ の導関数を求めて下さい。

(2) $f(x, y) = xy + y^2$, $g(r, \theta) = r \cos \theta$, $h(r, \theta) = r \sin \theta$ に対して、 $F(r, \theta) = f(g(r, \theta), h(r, \theta))$ によって定まる合成関数 $F(r, \theta)$ の偏導関数を求めて下さい。

配点：各 5 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1)

$$F(t) = 3(t - 1)^2 - (t + 1)^2 = 2t^2 - 8t + 2$$

ですから、

$$F'(t) = 4t - 8$$

です。

(2)

$$F(r, \theta) = r \cos \theta r \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 (\cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta)$$

$$F_r(r, \theta) = 2r (\cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta)$$

$$\begin{aligned} F_\theta(r, \theta) &= r^2 (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= r^2 (\cos 2\theta + \sin 2\theta) \end{aligned}$$

□

8 $G(x, y) = (x + y - 1)^3 - 2(x - y - 3)^2$ のとき曲線 $G(x, y) = 0$ について以下の問いに答えて下さい：

(1) 特異点、つまり、曲線上の点で $\text{grad} G(x, y) = \mathbf{0}$ となる点があれば求めて下さい。

(2) 曲線上の点 $(4, -1)$ における接線の方程式を求めて下さい。

配点：各 5 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1)

$$G_x(x, y) = 3(x + y - 1)^2 - 4(x - y - 3)$$

$$G_y(x, y) = 3(x + y - 1)^2 + 4(x - y - 3)$$

ですから、特異点は連立方程式：

$$\begin{cases} (x + y - 1)^3 - 2(x - y - 3)^2 = 0 & \cdots (1) \\ 3(x + y - 1)^2 - 4(x - y - 3) = 0 & \cdots (2) \\ 3(x + y - 1)^2 + 4(x - y - 3) = 0 & \cdots (3) \end{cases}$$

の解です。

(2)-(3) によれば $x - y - 3 = 0$ が分かり、(2)+(3) によれば $x + y - 1 = 0$ です。

従って (1) に注意して

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

の解を求めれば良い事が分かり、解は $(x, y) = (2, -1)$ です。

つまり特異点は $(2, -1)$ のみです。

(2)

$$\operatorname{grad} G(4, -1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \end{pmatrix}$$

なので、接線の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 20 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

もしくは、

$$\begin{aligned} 4(x - 4) + 20(y + 1) &= 0 \\ x + 5y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

です。

□