１．関数 $f(x,y)=\|xy\|$ が原点に於いて偏微分可能であるかどうか調べて下さい。

配点：５点	シラバス達成度目標：ア

解答例

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{0}{h}\to 0 \quad \text{as } h\to 0$$

によれば、関数 $f(x,y)$ は原点で x に関して偏微分可能であり、また、

$$\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\frac{0}{h}\to 0 \quad \text{as } h\to 0$$

によれば、関数 $f(x,y)$ は原点で y に関しても偏微分可能である。

A　偏微分係数の定義式が書かれていれば　２点
B　絶対値の関数が原点で『尖っている』などの理由により不可能としている　１点
C　連続性を示しているのみのもの　２点
D　偏導関数が絶対値を無視した計算で求まってしまっているもの　１点
E　xでの偏微分可能性のみ示しているもの　４点
F　上手く証明の軌道に乗ってはいるがで計算ミス等により失敗しているもの　３点
G　導関数の極限を調べているもの（ミスあり）　３点
H　ちょっとした考え違い　－１点
I　計算ミス　－２点

２． 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

（１） $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

（２） $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y-2}{x^3+y-1}$

（３） $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x}{x+2y}$

（４） $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)$

配点：(１)、(３) １５点、(２) １０点、(４) ５点	シラバス達成度目標：ア

解答例 （１）$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおいて絶対値をとると

$$\begin{aligned}\left|\frac{r^3\cos^3\theta-r^3\sin^3\theta}{r^2}\right| &= r|\cos^3\theta-\sin^3\theta| \\ &\le r(|\sin\theta|^3+|\sin\theta|^3) \\ &\le 2r\end{aligned}$$

D 絶対値をとらずに評価しているもの（ミスあり） －３点
E 評価自体が途中で駄目になっているもの ８点
G そもそも評価が全くないもの －１０点
H 評価が雑なもの－５点

であり、

$$0\le\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\le 2r$$

F この評価式まで出来ているがそれ以降が無いもの －５点

の各辺において $(x,y)\to(0,0)$ の極限を考えれば、左右辺は 0 に収束しているから中辺も 0 に収束する事が分かる。

従って求める極限値は存在して 0 である。

A x軸、y軸などで試しているだけのもの ５点
B 些細なミス －２点
C 挟み撃ちの議論不足 －３点

（２）与式の分母・分子それぞれに $x=0, y=0$ を代入してみると普通に代入出来て値は 2 となる。従って求める極限値は 2 である。

A x軸、y軸などで試しているだけで結論の間違っているもの ３点
B 直線で近づけただけで結論してしまっているもの（結論は合っている） ５点
C 代入しているのかも知れないが、説明が一切無いもの －１点
D 評価までやったけれども駄目だったもの ６点
E 代入して２なのに勘違いしているもの －３点

（3）まず x 軸に沿って近づけてみよう。原点以外の x 軸上では、与えられた関数は

$$\frac{3x}{x} = 3$$

であり、従って x 軸に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけたとき、この関数は 3 に近づく。

また、原点以外の y 軸上では

$$\frac{0}{2y} = 0$$

であるから y 軸に沿って近づけたときの極限値は 0 である。

この様に、異なる２つの近づけ方で極限値が異なっているため、求める極限値は存在しない。

A　議論が不十分なもの（軽度）　－２点
B　計算ミスによるもの　－５点
C　２つの近づけ方で極限値が違う事まで出ているのに
結論に辿り着けていないもの　８点
D　0/0=0とだけしているもの　２点
E　１つの近づけ方のみでやっているもの　５点
F　議論が非情に雑なもの　－１０点
G　色々計算したが極限があるもの　５点

（4）$x^2 + y^2 = w$ とおけば、与えられた関数は $\dfrac{\sin w}{w}$ であり、$(x, y) \to (0, 0)$ のとき $w \to 0$ であって、$\lim_{w\to 0} \frac{\sin w}{w} = 1$ であるから、求める極限値は 1 である。

A　何か試してx軸などやっているもの　２点
B　sin w / wまでは行っているがこの極限が正しく求められていないもの　３点
C　些細なミス　－１点

３．次の関数の偏導関数を求めて下さい。

（１）$g(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

（２）$h(x, y) = x^2 y - 5y^3 + 1$

配点：各１５点	シラバス達成度目標：イ

解答例　（１）

$$g_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad g_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

（２）

$$h_x(x, y) = 2xy, \qquad h_y(x, y) = x^2 - 15y^2$$

（１）、（２）それぞれについて

A　計算ミス　－５点
B　重度の計算ミス　－１０点

４． 関数 $m(x, y)$ は３階偏微分可能であって α は定数であるとします。

$$x = v\cos\alpha - w\sin\alpha,\ y = v\sin\alpha + w\cos\alpha \quad \cdots(*)$$

であるとき、以下の問いに答えて下さい。

（１）m_v, m_w を m_x, m_y で表して下さい。

（２）$m_{vv} + m_{ww}$ を m の x, y に関する（2 階までの）偏導関数で表して下さい。

ただし、m_v, m_{ww} などは、関係式 $(*)$ によって x, y を v, w の関数と考えて作った合成関数 $m(x(v, w), y(v, w))$ の v, w による各種偏導関数を表すものとします。

配点：（１）５点、（２）５点	シラバス達成度目標：ウ

解答例 （１）

$$\begin{aligned} m_v &= m_x x_v + m_y y_v \\ &= m_x\cos\alpha + m_y\sin\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_w &= m_x x_w + m_y y_w \\ &= m_x(-\sin\alpha) + m_y\cos\alpha \end{aligned}$$

A　XvやYvが計算されておらずこのままになっているもの　３点
B　少し計算して駄目だったもの　１点
C　計算ミス　－２点
D　dと∂の間違い　－１点

（２）

$$\begin{aligned} m_{vv} &= (m_{xx}x_v + m_{xy}y_v)\cos\alpha + (m_{yx}x_v + m_{yy}y_v)\sin\alpha \\ &= (m_{xx}\cos\alpha + m_{xy}\sin\alpha)\cos\alpha + (m_{yx}\cos\alpha + m_{yy}\sin\alpha)\sin\alpha \\ &= m_{xx}\cos^2\alpha + (m_{xy} + m_{yx})\cos\alpha\sin\alpha + m_{yy}\sin^2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{ww} &= (m_{xx}x_w + m_{xy}y_w)(-\sin\alpha) + (m_{yx}x_w + m_{yy}y_w)\cos\alpha \\ &= \{m_{xx}(-\sin\alpha) + m_{xy}\cos\alpha\}(-\sin\alpha) + \{m_{yx}(-\sin\alpha) + m_{yy}\cos\alpha\}\cos\alpha \\ &= m_{xx}\sin^2\alpha - (m_{xy} + m_{yx})\cos\alpha\sin\alpha + m_{yy}\cos^2\alpha \end{aligned}$$

となるので、

$$m_{vv} + m_{ww} = m_{xx} + m_{yy}$$

である事が分かる。

A　ある程度の計算があれば　２点
B　クロスタームがそもそも無いもの（結果自体は合っている）　３点
C　少しミスがあったもの　４点
D　dと∂の間違い　－１点

５．$p(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ であるとき、$p(x,y) = 0$ が表す曲線の原点でない点 (a,b) における接線の方程式を求めて下さい。

配点：１０点	シラバス達成度目標：ウ、エ

B　Px(a,b)でなくPx(x,y)を使ってしまっているもの　－５点
F　傾きの計算が違う　－５点
G　傾きまではOK　６点

解答例

$$p_x = 3x^2 - 3y, \quad p_y = -3x + 3y^2$$

であり、これらが共に 0 になる点は第１式から分かる $y = x^2$ を第２式に代入して得られる方程式 $x = x^4$、すなわち $x(x^3-1) = 0$ を解いて $x = 0, 1$ (このときそれぞれ $y = 0, 1$) であるが、これら２点のうち曲線 $p(x,y) = 0$ 上にあるのは $(0,0)$ のみであり、従って特異点は原点のみである。

よって原点以外では曲線 $p(x,y) = 0$ の法線ヴェクターは $\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ であるから、接線の方向ヴェクターはこれに垂直なヴェクター $\begin{pmatrix} p_y \\ -p_x \end{pmatrix}$ である事が分かり、従って点 (a,b) における接線の方程式は

$$(3a^2 - 3b)(x - a) + (-3a + 3b^2)(y - b) = 0$$

である。

A　（多項式）＝０の形になっていない　－２点
C　内積を使って記述している場合で、内積記号が無いもの　－１点
D　計算ミス　－２点
E　書き違いなど　－１点