

1. 関数 $f(x, y) = xy(x + 2y - 6)$ の極値を全て求めて下さい。

配点：20点 シラバス達成度目標：オ

解答例 まず2階までの各偏導関数を求めておく。

$$f_x = 2xy + 2y^2 - 6y, \quad f_y = x^2 + 4xy - 6x$$

$$f_{xx} = 2y, \quad f_{xy} = 2x + 4y - 6, \quad f_{yy} = 4x$$

すると、

$$\text{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy + 2y^2 - 6y \\ x^2 + 4xy - 6x \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2x + 4y - 6 \\ 2x + 4y - 6 & 4x \end{vmatrix}$$

であるので、 $\text{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる点は連立方程式：

$$\begin{cases} 2y(x + y - 3) = 0 \\ x(x + 4y - 6) = 0 \end{cases}$$

の解であり、これを解くと、第1式から $y = 0$ または $y = -x + 3$ である。

$y = 0$ のときは第2式から $x = 0, 6$ となり、また、 $y = -x + 3$ の時は同様に第2式から

$$x(x - 4x + 12 - 6) = 0$$

$$x(-3x + 6) = 0$$

$$x = 0, 2$$

となるので、結局この連立方程式の解は $(x, y) = (0, 0), (6, 0), (0, 3), (2, 1)$ の4点である事が分かる。

そこでこれら4点について、2階微分の行列式を計算してみると、

$$(x, y) = (0, 0) \text{ のとき、} \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} < 0 \quad \text{：極値でない}$$

$$(x, y) = (6, 0) \text{ のとき、} \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 24 \end{vmatrix} < 0 \quad \text{：極値でない}$$

$$(x, y) = (0, 3) \text{ のとき、} \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} < 0 \quad \text{：極値でない}$$

$$(x, y) = (2, 1) \text{ のとき、} \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{：極値である}$$

となり、更に f_{xx} の符号によれば、 $(x, y) = (2, 1)$ では極小値 (-4) である事が分かる。

答え： $(x, y) = (2, 1)$ で極小値 -4

A 全体の流れが最後まで出来ているもの 最大20点
不正解だった理由により以下の通り減点する：

- AA 偏微分ミス - 7点
- AB 候補点ミス - 5点
- AC ヘシアンによる評価のミス - 3点
- AD 些細なミス、値の書き忘れなど - 2点

B ヘシアンによる判定を行っていないもの 最大10点
不正解だった理由により以下の通り減点する：

- BA 偏微分ミス - 3点
- BB 候補点ミス - 2点

C 偏微分以降の方針が立たないものなど 6点

2. 条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとでの関数 $f(x, y) = 4x - 3y$ の極値を求めて下さい。

配点: 20点 シラバス達成度目標: カ

解答例 関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) に於いて題意の条件の下での極値であると仮定します。各関数のグラディエントを計算すると

$$\text{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{grad}g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

ですが、 $\text{grad}g(x, y) = \vec{0}$ となるのは明らかに原点のみです。一方で、点 (a, b) は題意の条件 $g(x, y) = 0$ を満たさねばならないため $a^2 + b^2 = 1$ であり、点 (a, b) は原点ではない事が分かります。

以上により $\text{grad}g(a, b) \neq \vec{0}$ である事が分かります。

従って Lagrange の定理により、 $\text{grad}f(a, b) = k \text{grad}g(a, b)$ となる様な実数 k が存在する事が分かります。

これに点 (a, b) が条件を満たすと云う式を加えて具体的に書けば

$$\begin{cases} 4 = 2ka \\ -3 = 2kb \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

となりこれを解いて a, b を求めれば良い。

しかし明らかに k は 0 ではなく、 $a = \frac{4}{2k}, b = -\frac{3}{2k}$ なのでこれを第3式に代入して

$$\frac{16}{4k^2} + \frac{9}{4k^2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{25}{4} = k^2$$

により $k = \pm\frac{5}{2}$ が分かり、これを戻してやれば $(a, b) = (\pm\frac{4}{5}, \mp\frac{3}{5})$ (復号同順) です。

以上により、極値の候補点は2点 $(\pm\frac{4}{5}, \mp\frac{3}{5})$ である事が分かりました (復号同順)。

条件 $g(x, y) = 0$ を満たす点全体を集合と考えた時、この集合は円周であり、閉曲線(有界閉集合)です。連続関数 $f(x, y)$ は、閉曲線上で必ず最大値と最小値を持ち、かつそれらは同時に極大値、極小値である事が知られています。

そうするとその存在する最大値・最小値は極値であるが故に先程求めた候補点2点のいずれかで達成されていなければならないわけですが、この2点での $f(x, y)$ の値を調べてみると

$$f\left(\pm\frac{4}{5}, \mp\frac{3}{5}\right) = \pm\frac{16}{5} \pm \frac{9}{5} = \pm 5 \quad (\text{復号同順})$$

なので、この前者が最大値であり、後者が最小値である他ありません。それらはまた同時に極値でもあったので答えは以下の通り:

$$\text{答え: } \begin{cases} (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) & \text{において極大値 } 5, \\ (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) & \text{において極小値 } -5. \end{cases}$$

A ラグランジュの乗数法によるもの

- AA $\text{grad}g(a, b)$ がゼロベクトルでない事をきちんと示していない - 2点
- AB 閉曲線上の連続関数の性質を使った議論が不十分であるか全くないもの - 3点
- AC 計算ミスにより答えが違ったものは基本的に 15点
- AD 極値の候補を求めた所で停まってしまったもの 15点
- AE 最初の微分以降さっぱりのもので 5点
- AF 極値の候補を求める以前の所で停まってしまったもの 10点
- AG 数値の書き忘れなど - 3点 (一部 AF と表記してしまったものあり)

B 代入して1変数化しているもの

- BA 微分の時点でミス 8点
- BB 微分が0の点を求める時にミス 12点
- BC 増減表・グラフでミス 15点

3. 極限值 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ が存在するかどうか調べ、存在するならその値も答えて下さい。

配点：15点 | シラバス達成度目標：ア

解答例 この極限は $\frac{0}{0}$ の不定形であり、この分数関数の分子分母の次数を比較するといずれも2次で釣り合っているため、求める極限値は存在しない可能性が高いと考える。そこで、まず x -軸上での関数の値を調べると、

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

となっていて、 x -軸上ではこの関数は常に一定値1であるから、 x -軸に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ とした時の極限値も矢張り1である。

一方 y -軸上では

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

となっていて、常に一定値-1であるから、 y -軸に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ とした時の極限値は-1である。

この様に近づけ方によって極限値が異なる値になっているので、題意の極限値は存在しない。

- A 概ね出来ているが記述の雑なものや些細なミス 12点
- B 極座標による変形まで 10点
- C 極座標で答えを出しているが、極限がないと言う主張の弱いもの 12点
- D 1つの方向から近づけただけで結論してしまっているもの 5点
- E 正しい答えが出ているのに勘違いしているもの 8点

4. 次の関数の2階の偏導関数を求めて下さい。

(1) $w(x, y) = \frac{x}{x + y}$

(2) $p(x, y) = \log(x^2 y)$

配点：各10点 | シラバス達成度目標：イ

解答例 (1)

$$w_x(x, y) = \frac{x + y - x}{(x + y)^2} = \frac{y}{(x + y)^2}$$

$$w_y(x, y) = -\frac{x}{(x + y)^2}$$

$$w_{xx}(x, y) = -2\frac{y}{(x + y)^3}$$

$$w_{xy}(x, y) = w_{yx}(x, y) = \frac{(x + y)^2 - y^2(x + y)}{(x + y)^4} = \frac{x^2 - y^2}{(x + y)^4} = \frac{x - y}{(x + y)^3}$$

$$w_{yy}(x, y) = 2\frac{x}{(x + y)^3}$$

(2) $p(x, y) = 2 \log x + \log y$ なので

$$p_x(x, y) = \frac{2}{x}, \quad p_y(x, y) = \frac{1}{y}$$

$$p_{xx}(x, y) = -\frac{2}{x^2}, \quad p_{xy}(x, y) = p_{yx}(x, y) = 0, \quad p_{yy}(x, y) = -\frac{1}{y^2}$$

(1)、(2) 共通

- 2階偏導関数3種類 各2点
- 1階微分も含めた計算の部分で 4点
- 記述が雑だったり、通分していないなど不十分なものは -1点

5. 次の式が成り立っているときに $\frac{dy}{dx}$ を x, y で表して下さい。

$$y = 1 + xe^y$$

配点：10点 | シラバス達成度目標：エ

解答例 関係式の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} y' &= e^y + xe^y y' \\ (1 - xe^y)y' &= e^y \\ y' &= \frac{e^y}{1 - xe^y} \\ y' &= \frac{e^y}{2 - y} \end{aligned}$$

である。

CA 微分の計算ミスや途中までのもの 6点
CB ケアレスミス 8点

A 陰関数の微分の公式を使ったもの
AA 公式のミス 6点
AB 偏微分のミス 4点
AC 少しの計算ミスだけのもの 8点
AD 良く出来ているが途中のもの 6点

B 単に右辺を偏微分してしまったものなど 3点

A 勘違いした計算のもの 3点
B 計算ミス 6点
C 公式の形までは出来ているもの 6点

6. $f(x, y)$ が2階偏微分可能であって、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を使って

$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

とした時に以下の問いに答えて下さい：

(1) $F_r(r, \theta), F_\theta(r, \theta)$ を $f_x(r \cos \theta, r \sin \theta), f_y(r \cos \theta, r \sin \theta), r, \theta$ を使って表して下さい。

(2)

$$\{f_x(r \cos \theta, r \sin \theta)\}^2 + \{f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)\}^2 = \{F_r(r, \theta)\}^2 + \frac{1}{r^2} \{F_\theta(r, \theta)\}^2$$

を証明して下さい。

配点：(1) 10点、(2) 5点 | シラバス達成度目標：ウ

解答例 (1) 合成関数の微分法則により、

$$\begin{aligned} F_r &= f_x x_r + f_y y_r \\ &= f_x \cos \theta + f_y \sin \theta \\ F_\theta &= f_x x_\theta + f_y y_\theta \\ &= f_x(-r \sin \theta) + f_y r \cos \theta \end{aligned}$$

である。

(2) 右辺を計算すると、

$$\begin{aligned} \{F_r(r, \theta)\}^2 + \frac{1}{r^2} \{F_\theta(r, \theta)\}^2 &= (f_x \cos \theta + f_y \sin \theta)^2 + \frac{1}{r^2} (-f_x r \sin \theta + f_y r \cos \theta)^2 \\ &= f_x^2 + f_y^2 \end{aligned}$$

となって題意を得る。

A 方針の良くないもの 2点
B 些細なミスだけのもの 4点