

1. xy -平面全体で定義された関数 $f(x, y)$ が、点 (a, b) に於いて x に関して偏微分可能であるとはどう云う事ですか。その定義を書いて下さい。

配点：5 点 | シラバス達成度目標：ア

解答例 極限值：

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x}$$

が有限値として存在するとき、関数 $f(x, y)$ は、点 (a, b) に於いて x に関して偏微分可能であると言います。

2. 次の極限值が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + 2y^4}$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3}{x^3 - y^3}$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

配点：各 10 点 | シラバス達成度目標：ア

解答例 (1) この関数の（原点を除いた） x -軸上での値を調べると

$$\frac{0}{x^2} = 0$$

となっており、従って x -軸に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ と近づけた場合は 0 に近づきます。

一方、直線 $y = x$ 上での値は（こちらも原点は除きます）、

$$\frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}$$

となっている事からこの直線に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ と近づけると関数の値は $\frac{1}{3}$ に近づきます。

この様に近づき方によって関数の値の収束値が異なるので題意の極限值は存在しません。

（2）この関数の（原点を除いた） x -軸上での値を調べると

$$\frac{3x^3}{x^3} = 3$$

となっており、従って x -軸に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ と近づけた場合は 3 に近づきます。

一方、 y -軸上での値は（こちらも原点は除きます）、

$$\frac{0}{-y^3} = 0$$

となっている事から y -軸に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ と近づけると関数の値は 0 に近づきます。

この様に近づき方によって関数の値の収束値が異なるので題意の極限值は存在しません。

（3）関数の絶対値を取って極座標で考えれば

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| &= \left| \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2} \right| \\ &= r |\cos^3 \theta| \end{aligned}$$

ですが、 $|\cos \theta| \leq 1$ から、

$$\leq r$$

となって結局不等式：

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| \leq r$$

が得られます。

ここで各辺に於いて $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ とすれば、左右辺は 0 に収束していますから中辺も 0 に収束する事が分かり、結局求める極限值は存在して 0 です。

3. 次の関数の 1 次・2 次の偏導関数を求めて下さい。ただし、 $g_{xy} = g_{yx}$ などは成り立ちますので、2 次偏導関数は 3 種のみで結構です。

(1) $g(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$

(2) $h(x, y) = xy^3 + 2x^2y^2 + 9x^3$

(3) $k(x, y) = \cos(2x - y)$

(3)

$$k_x(x, y) = -2 \sin(2x - y)$$

$$k_y(x, y) = \sin(2x - y)$$

$$k_{xx}(x, y) = -4 \cos(2x - y)$$

$$k_{xy}(x, y) = k_{yx}(x, y) = 2 \cos(2x - y)$$

$$k_{yy}(x, y) = -\cos(2x - y)$$

配点：各 15 点	シラバス達成度目標：イ
-----------	-------------

解答例 (1) $g(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ なので、

$$g_x(x, y) = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$g_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$g_{xx}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$g_{xy}(x, y) = g_{yx}(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$g_{yy}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

(2)

$$h_x(x, y) = y^3 + 4xy^2 + 27x^2$$

$$h_y(x, y) = 3xy^2 + 4x^2y$$

$$h_{xx}(x, y) = 4y^2 + 54x$$

$$h_{xy}(x, y) = h_{yx}(x, y) = 3y^2 + 8xy$$

$$h_{yy}(x, y) = 6xy + 4x^2$$

4. 次の関数について 1 次の偏導関数 $m_x(x, y), m_y(x, y)$ を求めて下さい。

$$m(x, y) = \begin{cases} x \tan^{-1} \frac{y}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

配点：10 点 シラバス達成度目標：イ

解答例 直線 $x = 0$ 以外では、普通に偏微分出来て

$$m_x(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} + x \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$m_y(x, y) = x \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

となります。

一方、直線 $x = 0$ の上では、例えば点 $(0, y)$ で x について考えると

$$\frac{m(x, y) - m(0, y)}{x} = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

であり、 $y \neq 0$ のときにはこの極限值は存在しません。 $y = 0$ のときは極限值は存在して 0 です。また、点 $(0, y)$ で変数 y について考えると、この直線上では定数関数なので偏微分可能で、 $m_y(0, y) = 0$ となります。

以上により、 $x \neq 0$ である領域と原点において x に関して偏微分可能、全平面に於いて y に関して偏微分可能で、以下の通り。

$$m_x(x, y) = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2} & x \neq 0 \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad m_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

5. $p(x, y) = x^2 + 2y^2, r(t) = 4 \cos t, v(t) = 3 \sin t$ を、関係式 $x = r(t), y = v(t)$ によって合成して得られる関数 $w(t) = p(r(t), v(t))$ の導関数を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：ウ

解答例 実際に合成すると

$$w(t) = p(4 \cos t, 3 \sin t) = 16 \cos^2 t + 18 \sin^2 t = 16 + 2 \sin^2 t$$

なので、その導関数は

$$w'(t) = 4 \sin t \cos t = 2 \sin 2t$$

となります。