

1. 次の極限值が存在するかどうか調べ、存在するなら値を求めて下さい。

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3y^2}{x^4 + 2y^2}$$

配点：15 点 シラバス達成度目標：ア

解答例 x -軸上（原点は除く）での関数の値は一定値 0 ですから、 x -軸に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ と近づけた場合、関数の値は 0 に近づきます。

一方、 y -軸上（原点は除く）での関数の値は、

$$\frac{3y^2}{x^4 + 2y^2} = \frac{3y^2}{2y^2} = \frac{3}{2}$$

となって矢張り一定値なので、 y -軸に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ と近づけた場合、関数の値は $\frac{3}{2}$ に近づきます。

この様に、近づけ方によって関数の値の近づいて行く先が違いますので題意の極限值は存在しません。

2. 関数 $h(x, y) = (x^3 - y)^2$ の 1 次偏導関数を求めて下さい。

配点：15 点 シラバス達成度目標：イ

解答例

$$\begin{aligned} h_x(x, y) &= 2(x^3 - y) \cdot 3x^2 \\ &= 6x^2(x^3 - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_y(x, y) &= 2(x^3 - y)(-1) \\ &= -2(x^3 - y) \end{aligned}$$

3. 3つの関数：

$$p(x, y) = x^2 - 2y^2, \quad r(s, t) = s^2 + t^2, \quad v(s, t) = st$$

を関係式 $x = r(s, t)$, $y = v(s, t)$ によって合成して得られる関数

$$w(s, t) = p(r(s, t), v(s, t))$$

の 1 次偏導関数を求めて下さい。

配点：15 点 | シラバス達成度目標：ウ

解答例

$$\begin{aligned} w_s(s, t) &= p_x(r(s, t), v(s, t))r_s(s, t) + p_y(r(s, t), v(s, t))v_s(s, t) \\ &= 2(s^2 + t^2)2s - 4st^2 \\ &= 4s^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_t(s, t) &= p_x(r(s, t), v(s, t))r_t(s, t) + p_y(r(s, t), v(s, t))v_t(s, t) \\ &= 2(s^2 + t^2)2t - 4sts \\ &= 4t^3 \end{aligned}$$

4. 関係式 $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2$ が成り立つとき $\frac{dy}{dx}$ を x, y で表して下さい。

ただし、関係式の表す曲線上の全ての点でそれが可能なわけではありませんが、それ（ y を x の関数と見る事）が不可能な点は除外して可能な点でどうなるかを答えて下さい。

配点：15 点 | シラバス達成度目標：エ

解答例 y は x の関数であると考えて関係式の両辺を x で微分すれば、

$$\begin{aligned} 2x - 4y - 4xy' + 10yy' &= 0 \\ (10y - 4x)y' &= 4y - 2x \\ y' &= \frac{2y - x}{5y - 2x} \end{aligned}$$

が分かります。

5. 表面積が 6 である直方体のうちで体積が最大のを求めて下さい。

配点：15 点 シラバス達成度目標：力

解答例 直方体の 3 辺の長さを x, y, z と置くと、表面積と体積はそれぞれ

$$(\text{表面積}) = 2(xy + yz + zx), \quad (\text{体積}) = xyz$$

と表されます。相加相乗平均の関係から

$$2(xy + yz + zx) \geq 6\sqrt[3]{(xyz)^2}$$

ですが、左辺は表面積ですからこれは 6 であって、結局

$$1 \geq xyz$$

が得られ、等号は $xy = yz = zx$ すなわち $x = y = z$ の時に成り立ちますから求める体積の最大値は立方体の時に達成されます。

6. 関数 $z(x, y) = x^3 + 2x^2y - xy^2 - 4xy$ の極値を求めて下さい。

配点：15 点 シラバス達成度目標：オ

解答例 まず必要となる微分計算を済ませておきます：

$$\begin{aligned} z_x &= 3x^2 + 4xy - y^2 - 4y, & z_y &= 2x^2 - 2xy - 4x, \\ z_{xx} &= 6x + 4y, & z_{xy} &= z_{yx} = 4x - 2y - 4, & z_{yy} &= -2x. \end{aligned}$$

すると、 $\text{grad}z(x, y) = 0$ となる点は連立方程式：

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy - y^2 - 4y = 0 \\ 2x^2 - 2xy - 4x = 2x(x - y - 2) = 0 \end{cases}$$

を解けば求める事が出来ます。

第2式の形から、 $x = 0$ の時に考えると、第2式はオクケーですから残るは第1式ですが、これも

$$0 = -y^2 - 4y = -y(y + 4)$$

となって結局 $(x, y) = (0, 0), (0, -4)$ が得られます。

一方、 $x \neq 0$ のときは、第2式から $x = y + 2$ が得られますのでこれを第1式に代入すれば

$$\begin{aligned} 3(y + 2)^2 + 4(y + 2)y - y^2 - 4y &= 0 \\ 6y^2 + 16y + 12 &= 0 \\ 3y^2 + 8y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

が得られますが、この2次方程式の判別式は

$$8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 64 - 72 < 0$$

となって実数解はありません。

以上から極値の候補点は $(0, 0), (0, -4)$ の2点です。

$z(x, y)$ のヘシアンを

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x + 4y & 4x - 2y - 4 \\ 4x - 2y - 4 & -2x \end{vmatrix}$$

とすると、2つの候補点では共にヘシアンは負であり、従って問題の関数に極値はありません。

7. $x^2 + y^2 = 1$ の条件のもとで関数 $k(x, y) = x^2 + 4xy - 2y^2$ の極値を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：力

解答例 $m(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ と置けば条件式は $m(x, y) = 0$ と書く事が出来ます。点 (a, b) で関数 $k(x, y)$ は条件 $m(x, y) = 0$ の下での極値であると仮定します。

$\text{grad}m(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ となる点は明らかに原点のみですが、点 (a, b) は条件 $m(x, y) = 0$ を満たしているため原点ではなく、従って $\text{grad}(a, b) \neq \mathbf{0}$ であることが分かります。

すると Lagrange の定理から $\text{grad}k(a, b) = p\text{grad}m(a, b)$ となる様な実数 p が存在しますが、これを成分で書いて条件式 $m(a, b) = 0$ と連立させれば

$$\begin{cases} 2a + 4b = 2pa \\ 4a - 4b = 2pb \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

となりますのでこれを解いて極値の候補点を求めます。

まず第 1、2 式ですが、これは整理すれば

$$\begin{pmatrix} 1-p & 2 \\ 2 & -2-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ですが、係数行列が正則な場合は $a = b = 0$ となり、これは第 3 式に反します。係数行列が正則でない場合は、行列式が 0 ですから、

$$0 = \begin{vmatrix} 1-p & 2 \\ 2 & -2-p \end{vmatrix} = (p+2)(p-1) - 4 = p^2 + p - 6 = (p-2)(p+3)$$

から $p = 2, -3$ が分かります。

$p = 2$ のとき、第 1、2 式から $a = 2b$ ですので、第 3 式から $(a, b) = \left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 、

$p = -3$ のとき、第 1、2 式から $b = -2a$ ですので、第 3 式から $(a, b) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \mp \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ がそれぞれ得られます（いずれも複号同順）。

以上から極値の候補は 4 点：

$$\left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \mp \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

です。

連続関数 $k(x, y)$ は閉曲線 $m(x, y) = 0$ 上で必ず最大値と最小値を達成し、同時にそれらは極値でもありました。従ってこの最大値・最小値は先に求めた極値の候補点の中になければなりません。これらの点における関数 $k(x, y)$ の値を求めると

$$k\left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2, \quad k\left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \mp \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -3$$

となっています（複号同順）ので、前者が最大値、後者が最小値である他ありません。これらは同時に極値でもありましたから、結局求める極値は

$$(\text{極大値}) : \left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ での } 2$$

$$(\text{極小値}) : \left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \mp \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ での } -3$$

が全てです。