１．等比級数の和の公式を使うことによって関数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ を x のべき級数で表して下さい。

配点：１０点	シラバス達成度目標：ア、イ

解答例　関数を変形すると

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$$

なので、これは公比が $-x^2$ の等比級数の和であると考えられるので、$|-x^2|<1$、すなわち $|x|<1$ のとき

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

と展開されます。

A　少しの計算・変形のみのもの　３点
B　重大な計算ミス、あるいはミスが多いもの　ー５点
D　計算ミス　ー３点

C　有限和になっているもの　ー１点

２．正項級数の収束／発散を判定する１つの方法として次のダランベールの判定法があります：

定理（d'Alembert's ratio test）　正項級数 $\sum p_n$ において極限値：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n}$ が有限値として存在するとき（その値を r として）、

(1) $0 \le r < 1$ ならば $\sum p_n$ は収束し、

(2) $1 < r < \infty$ ならば $\sum p_n$ は発散します。

また、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n} = \infty$ であるときも $\sum p_n$ は発散します。

（１）彼の考えは級数 $\sum p_n$ をある特殊な級数と比較してみようと云う精神に基づいていますが、そのあたりの事情を含めてなぜこの極限値を計算する事が鍵となるのかを大雑把に説明して下さい。

（２）ダランベールの判定法を適用して級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ の収束／発散を判定して下さい。

配点：（１）５点、（２）２０点	シラバス達成度目標：ア、イ

A　単に項の増加・減少に言及しているだけのもの　３点
B　公比、あるいは等比級数に言及してはいるが不十分なもの　４点
C　少し意味のある事が書かれているだけのもの　１～２点

解答例　（１）ダランベールの判定法は正項級数を等比級数と比較して判断しようとするもので、級数 $\sum p_n$ がもしも等比級数であるならば比 $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ は公比に相当します。従って n が大きい時にこの公比に相当するものがどの程度であるかを知るために極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n}$ を計算し、それが１より小さい事が収束する条件となります。

（２）この正項級数の第 n 項を a_n とすると、隣接項の比は

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} = \frac{n+1}{10} \to \infty$$

となって $n\to\infty$ で $+\infty$ に発散しますのでダランベールの判定法によりこの級数は発散します。

D　ここまでは出来ているが収束と結論しているもの　１０点

A　記述上の問題点があるもの　ー１点
B　計算ミスが多い、あるいは、重大なミスがあるもの　ー１０点
C　計算ミス　ー５点

３．べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n}x^n$ の収束半径を求めて下さい。

配点：２０点	シラバス達成度目標：ア

解答例　収束半径を求めるために隣接項の係数の比の絶対値を見ると、

$$\left|\frac{\frac{(-3)^n}{n}}{\frac{(-3)^{n+1}}{n+1}}\right| = \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{3}$$

となって $n\to\infty$ で $\frac{1}{3}$ に収束しますから求める収束半径は $\frac{1}{3}$ です。

A　未定義の記号など記述上の問題点　ー１点
B　計算ミス　ー５点
C　重大な計算ミス　ー１０点
D　マイナスの値になったもの、絶対値のつけ忘れ等　ー５点

E　定義の比が分子・分母逆のもの　ー１０点

４．関数 $\frac{1}{x}$ の、点 $x=1$ のまわりでのテイラー展開を求めて下さい。

ただし、展開が可能であることは既知とし、収束半径は求めなくて良いものとします。

配点：２０点	シラバス達成度目標：イ

解答例　関数を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{(x-1)+1}\\ &= \frac{1}{1-\{-(x-1)\}}\\ &= 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\cdots+(-1)^n(x-1)^n+\cdots\end{aligned}$$

となり、これが求める展開式です。

A　階乗が約分して消えていない　ー１点
C　階乗で割るのを忘れた　ー５点

E　少しの計算のみ　５点
F　係数の計算ミス　ー５点

D　x-1 のべきになっていない　ー５点

G　(-1)^n が抜けたもの　ー３点

B　最後の +••• がなくて有限和になっているもの　ー１点

５．テイラーの定理：

Taylor の定理

$f(x)$ が何回でも微分出来るとき、任意の a, b と任意の自然数 n に対して

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

となる様な c が a と b の間に存在する。

を使って以下の近似値計算をして下さい。ただし、$1 < \mathrm{e} < 3$ であることは分かっているものとします。

（1）$n = 2$ のときのテイラーの定理を関数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ に対して $x = 0$ の近くで適用して（つまり上の定理の表記で $a = 0$ と云うこと)、$\sqrt{\mathrm{e}}$ の近似値とその時の誤差の限界を求めて下さい。

（2）$\sqrt{\mathrm{e}}$ の値を小数点以下３桁まで正確に求めて下さい。

配点：（1）１５点、（2）１０点	シラバス達成度目標：ウ

A　記述上の問題点　ー１点

C　少しの計算のみ　４点

解答例　（1）$n = 2$ のときのテイラーの定理から

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + f'(0)\frac{1}{2} + \frac{1}{2!}f''(0)\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c)\frac{1}{2^3}$$

$$\sqrt{\mathrm{e}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{\mathrm{e}^c}{3\cdot 2^4}$$

D　この式がきちんと出来ていないもの　ー５点

となる様な定数 c が $0 < c < \frac{1}{2}$ の範囲に存在します。

そこで右辺の最初の３項までの和を近似値と考えれば

$$(\text{近似値}) = \frac{2^3 + 2^2 + 1}{2^3} = 1.625$$

G　近似値の計算ミス　ー３点

となり、またこの時の誤差の絶対値は

$$|(\text{誤差})| = \frac{\mathrm{e}^c}{3\cdot 2^4} < \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{3\cdot 2^4} < \frac{4^{\frac{1}{2}}}{3\cdot 2^4} = \frac{1}{24} < 0.04167$$

と評価されます。

B　誤差の評価と云うものが基本的に出来ていない　ー５点

E　評価の際の安直な間違った計算　ー３点
F　評価の際の計算ミス　ー２点

（2）上の結果では小数点以下３桁は確定していませんので、もっと大きな n について考えなければなりません。

一般に n 次の項までを近似値とした場合の誤差項は $n+1$ 次の項であって、

$$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}$$

の形をしているはずです。ここで c は $0 < c < \frac{1}{2}$ の範囲内にある定数ですから e^c は

$$\mathrm{e}^c < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} < 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

と評価されますので誤差自体は

$$|\,(\text{誤差})| < \frac{1}{(n+1)!\cdot 2^n}$$

と評価されます。そこで $R_n = \frac{1}{(n+1)!\cdot 2^n}$ をある程度求めてみると、

$$R_3 = \frac{1}{4!\cdot 2^3} = 0.0052\ldots$$
$$R_4 = \frac{1}{5!\cdot 2^4} = 0.00052\ldots$$
$$R_5 = \frac{1}{6!\cdot 2^5} = 0.000043\ldots$$

A　少しの計算のみ　４点

C　計算ミス　ー３点

となっており、$n=5$ で行けそうな気がします。実際、$n=5$ のときのテイラーの定理を使って近似値を計算してみると

$$\begin{aligned}(\text{近似値}) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!\cdot 2^2} + \frac{1}{3!\cdot 2^3} + \frac{1}{4!\cdot 2^4} + \frac{1}{5!\cdot 2^5} \\ &= \frac{5!\cdot 2^5 + 5!\cdot 2^4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2^3 + 5\cdot 4\cdot 2^2 + 5\cdot 2 + 1}{5!\cdot 2^5} \\ &= \frac{3840+1920+480+80+10+1}{5!\cdot 2^5} \\ &= \frac{6331}{3840} \\ &= 1.648697\ldots\end{aligned}$$

であり、この時の誤差は 0.000043 より小さいので

$$1.648654 = 1.648697 - 0.000043 < \sqrt{\mathrm{e}} < 1.648698 + 0.000043 = 1.648741$$

が得られ、従って求める小数点以下３桁が確定しました。1.648 です。

B　証明として誤差の大きさと桁の確定に関して少し不備のあるもの　ー２点

D　誤差の評価がないもの　ー５点