１．等比級数の和の公式を使うことによって関数 $\dfrac{1}{2-x}$ を $x$ のべき級数で表して下さい。

| 配点：１０点 | シラバス達成度目標：ア、イ |
|---|---|

解答例　関数を変形すると

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}x\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

となります。

ここで右辺の第２因子は公比が $\frac{x}{2}$ の等比級数の和であると考えられるので、$|\frac{x}{2}|<1$、すなわち $|x|<2$ のとき

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}x^n+\cdots$$

と展開されます。

２．べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}x^n$ の収束半径を求めて下さい。

| 配点：１５点 | シラバス達成度目標：ア |
|---|---|

解答例　$x^n$ の係数を $p_n$ とすれば

$$\left|\frac{p_n}{p_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{as } n\to\infty$$

ですから収束半径は $1$ です。

３．（１）関数 $f(x) = \log(1+x)$ の、$x=0$ でのテイラー展開を求めて下さい。ただし、展開が可能であることは既知として下さい。

（２）同じ関数 $f(x) = \log(1+x)$ に対してテイラーの定理を $n=2$ のとき（２次の項までの和が近似値、３次の項が誤差）に適用して $\log \dfrac{3}{2}$ の近似値を求めて下さい。

更にその時の誤差の絶対値がどの程度であるかも評価して下さい。

| 配点：（１）１０点、（２）１５点 | シラバス達成度目標：イ、ウ |
|---|---|

解答例　（１）$g(x) = \log(1+x)$ と置けば、

$$\begin{aligned}
g(x) &= \log(1+x) & g(0) &= 0 \\
g'(x) &= \frac{1}{1+x} & g'(0) &= 1 \\
g''(x) &= -(1+x)^{-2} & g''(0) &= -1 \\
g^{(3)}(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3} & g^{(3)}(0) &= (-1)(-2) \\
g^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} & g^{(4)}(0) &= (-1)(-2)(-3) \\
&\vdots & &\vdots \\
g^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} & g^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad n \geq 1
\end{aligned}$$

となっており、求める展開式は

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n + \cdots \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots
\end{aligned}$$

となります。

（２）Taylor の定理によれば、

$$\log(1+b) = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3(1+c)^3}b^3$$

となる様な $c$ が $0$ と $b$ の間に存在する事が解ります。

ここで $b = \frac{1}{2}$ とすれば

$$\log\frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3(1+c)^3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{(1+c)^3}$$

となって、近似値は $\frac{3}{8} = 0.375$、そのときの誤差は $\frac{1}{24(1+c)^3}$ ですが、

$$0 < c < \frac{1}{2} = b$$

であることから、

$$|（誤差）| = \left|\frac{1}{24(1+c)^3}\right| \leq \frac{1}{24} = 0.041666\cdots \leq 0.0417$$

と評価出来るので誤差の限界は $0.0417$ となります。

近似値；$0.375$　　誤差の限界；$0.0417$

４．次の極限値：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^4+y^4}$$

が存在するかどうか調べ、存在するならその極限値も求めて下さい。

| 配点：１５点 | シラバス達成度目標：エ |
|---|---|

解答例　まずは座標軸に沿った極限を見てみましょう。$x$-軸上（原点除く）での関数値は

$$\frac{xy^3}{x^4+y^4} = \frac{0}{x^4} = 0$$

ですので、この軸に沿って $(x,y)$ を $(0,0)$ に近づけてゆくと極限値は $0$ です。一方 $y$-軸上（原点除く）でも関数の値は

$$\frac{xy^3}{x^4+y^4} = \frac{0}{y^4} = 0$$

と云う風に一定値 $0$ ですので、この軸に沿った極限値も $0$ になります。

２つの座標軸でやって同じ値になってしまったので次は“斜めの直線” $y=x$ 上で考えてみましょう。

この直線上（ただし原点は除く）での関数の値を見ると

$$\frac{xy^3}{x^4+y^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

ですから、この場合の極限値は $\frac{1}{2}$ になっています。

以上により、近づけ方によって極限値が異なるので題意の極限値は存在しません。

５．関数 $w(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ の２階までの偏導関数を全て求めて下さい。

| 配点：２０点 | シラバス達成度目標：オ |
|---|---|

解答例

$$\begin{aligned}
w_x(x,y) &= \frac{1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} \\
&= \frac{2y}{(x+y)^2} \\
w_y(x,y) &= \frac{-1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} \\
&= -\frac{2x}{(x+y)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{xx}(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3} \\
w_{xy}(x,y) = w_{yx}(x,y) &= \frac{2\cdot(x+y)^2-2y\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} \\
&= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} \\
w_{yy}(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

６．$a(x,y)=x^2+3y^2$、$b(t)=2\sin t$、$c(t)=\cos t$ であるときに

$$A(t)=a(b(t),c(t))$$

で定義される合成関数 $A(t)$ の導関数を求めて下さい。

| 配点：１０点 | シラバス達成度目標：カ |
|---|---|

解答例

$$A(t)=4\sin^2 t+3\cos^2 t=\sin^2 t+3$$

なので、

$$A'(t)=2\sin t\cos t=\sin 2t$$

です。

７．曲線 $F(x,y)=0$ 上の点 $(a,b)$ におけるこの曲線の法線の方向ヴェクターは

$$\mathrm{grad}F(a,b)=\begin{pmatrix}F_x(a,b)\\F_y(a,b)\end{pmatrix}$$

で与えられることを、曲線の上を動く点の運動 $(x(t),y(t))$ を使って大まかに説明して下さい。ただし、点 $(a,b)$ は特異点ではないとします。

| 配点：５点 | シラバス達成度目標：カ |
|---|---|

解答例　ある質点の運動 $(x(t),y(t))$ があって、この質点は常に曲線 $F(x,y)=0$ 上を動いており、$t=T$ での位置が点 $(a,b)$ であるものとします。

このとき任意の $t$ について

$$F(x(t),y(t))=0$$

が成り立っているので両辺を $t$ で微分すると、合成関数の微分法則から

$$0=F_x(x(t),y(t))x'(t)+F_y(x(t),y(t))y'(t)=\begin{pmatrix}F_x(x(t),y(t))\\F_y(x(t),y(t))\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$$

となります。特に $t=T$ では

$$0=\begin{pmatrix}F_x(x(T),y(T))\\F_y(x(T),y(T))\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'(T)\\y'(T)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_x(a,b)\\F_y(a,b)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'(T)\\y'(T)\end{pmatrix}$$

となりますから、最後の内積の形から分かるようにヴェクター $\begin{pmatrix}F_x(a,b)\\F_y(a,b)\end{pmatrix}$ は質点の点 $(a,b)$ での速度ヴェクター $\begin{pmatrix}x'(T)\\y'(T)\end{pmatrix}$ と直交しています。

質点の運動においてその速度ヴェクターは常に運動の接線方向を向いていますから結局、ヴェクター $\begin{pmatrix}F_x(a,b)\\F_y(a,b)\end{pmatrix}$ は曲線 $F(x,y)=0$ 上の各点 $(a,b)$ においてこの曲線の法線ヴェクターである事が分かります。