

問題 1 等比級数の和の公式を使うことによって関数 $\frac{1}{1+x}$ を $x-5$ のべき級数で表して下さい。

配点：10点 シラバス達成度目標：イ

解答例 まず x の所を強引に $x-5$ に置き換えて変形してゆくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1+(x-5)+5} = \frac{1}{6+(x-5)} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-5}{6}} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{-(x-5)}{6}}\end{aligned}$$

A 変形の重大ミス
-5点

となります。ここで $-\frac{x-5}{6}$ の部分をまとめて r と書けば：

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-r}$$

となりますから $|r| < 1$ であれば等比級数の和の公式から

$$= \frac{1}{6}(1+r+r^2+\dots)$$

と展開することが出来ます。これを元の x に戻せば

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{6} \left\{ 1 - \frac{x-5}{6} + \left(-\frac{x-5}{6} \right)^2 - \dots \right\} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{6^2}(x-5) + \frac{1}{6^3}(x-5)^2 - \dots\end{aligned}$$

となって $x-5$ のべき級数に展開することが出来ました。

この表現の成り立つ範囲は $|r| < 1$ すなわち $|\frac{x-5}{6}| < 1$ でしたから整理すれば

$$|x-5| < 6, \quad \text{すなわち} \quad -1 < x < 11$$

となっています。

問題 2 正項級数の収束／発散を判定する 1 つの方法として次のダランベールの判定法があります：

定理 (d'Alembert's ratio test) 正項級数 $\sum p_n$ において極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n}$ が有限値として存在するとき (その値を r として)、

(1) $0 \leq r < 1$ ならば $\sum p_n$ は収束し、

(2) $1 < r < \infty$ ならば $\sum p_n$ は発散します。

また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \infty$ であるときも $\sum p_n$ は発散します。

この判定法によって正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ の収束／発散を判定して下さい。

配点：15点 シラバス達成度目標：ア

解答例 第 n 項を $p_n = \frac{10^n}{n!}$ としますと隣接項の比は

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \frac{10}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

ですから d'Alembert の判定法によりこの級数は収束します。

A 極限記号などの記法不十分 -2点

D 分母・分子が逆 -10点

B p_n の記号の説明無し -1点

E 重大な計算ミス -5点
F 計算ミス(軽い) -3点

C 結論が『0に収束する』などおかしいもの -3点

問題 3 べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n$ の収束半径を求めて下さい。

配点：15点 シラバス達成度目標：ア

解答例 x^n の係数を a_n と書けば $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ですから、

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}} \right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \rightarrow 1 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

となって収束半径は 1 です。

B 結論勘違い
- 3 点

C 絶対値無し - 3 点

A 各種記号の記法
不十分 - 2 点

D 計算ミス - 3 点
E 重大ミス - 6 点

B 計算ミス - 5 点
C 記法不十分 - 1 点
F 『3 項』の解釈ミス - 10 点

D 結論まで行けず - 5 点
E 結論が定数和 - 4 点
H 結論が x のべきでない - 3 点
G 結論は合っているが根拠希薄 - 3 点

問題 4 関数 $f(x) = \tan^{-1} x$ の、点 $x = 0$ のまわりでのテイラー展開の最初の (0 でない) 3 項を求めて下さい。

ただし、展開が可能であることは既知とします。

配点：15点 シラバス達成度目標：イ

解答例 まず微分計算をしておきます。

$$f(x) = \tan^{-1} x, \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -(1+x^2)^{-2}(2x) \quad f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -(-2)(1+x^2)^{-3}(2x)^2 - 2(1+x^2)^{-2}$$

$$f^{(3)}(0) = -2$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= -(-2)(-3)(1+x^2)^{-4}(2x)^3 + 16(1+x^2)^{-3}x - 2(-2)(1+x^2)^{-3}(2x) \\ &= -6(1+x^2)^{-4}(2x)^3 + 24(1+x^2)^{-3}x \end{aligned}$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = (x \text{ を因数として含む項}) + 24(1+x^2)^{-3}$$

$$f^{(5)}(0) = 24$$

以上から求める最初の 0 でない 3 項は

$$x + \frac{-2}{3!}x^3 + \frac{24}{5!}x^5 = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

です。

A 最初の微分計算が出来ていない
- 10 点

問題 5 $\sin x$ の $x = \pi$ の周りでのテイラー展開を求めて下さい。

ただし、展開が可能であることは既知とします。

配点：20点 シラバス達成度目標：イ

解答例 (3) $h(x) = \sin x$ と置けば、

$$\begin{array}{lll} h(x) = \sin x & h(\pi) = 0 & \frac{1}{0!}h(\pi) = 0 \\ h'(x) = \cos x & h'(\pi) = -1 & \frac{1}{1!}h'(\pi) = -1 \\ h''(x) = -\sin x & h''(\pi) = 0 & \frac{1}{2!}h''(\pi) = 0 \\ h^{(3)}(x) = -\cos x & h^{(3)}(\pi) = 1 & \frac{1}{3!}h^{(3)}(\pi) = \frac{1}{3!} \end{array}$$

となっていて以降は周期的に繰り返すだけなので、求める展開式は

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{1}{3!}(x - \pi)^3 - \frac{1}{5!}(x - \pi)^5 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(x - \pi)^{2n+1} + \cdots$$

となります。

A 一般項無し -5点

B 形式的に $(x-\pi)^n$ になっていない -5点

C 軽い計算ミス -5点
D 記法ミス -3点
G ミスが多い -8点

E 定数和になっている -10点
F 級数がない、あるいはあっても酷く間違っている -10点

A 『 $n=4$ 』の間違い -5点

問題 6 テイラーの定理について以下の問いに答えて下さい。

(1) テイラーの定理はより基本的なある定理を一般化したものと考えることが出来ますが、それは何と言う定理ですか。

(2) $n = 4$ のときのテイラーの定理を関数 $f(x) = \log(1+x)$ に対して $x = 0$ の近くで適用して(つまり上の定理の表記で $a = 0$ と云うこと)、 $\log 2$ の近似値とその時の誤差の限界を求めて下さい。

配点：(1) 10点、(2) 15点 シラバス達成度目標：ウ

解答例 (1) 平均値の定理。

『コーシーの定理』としたもの -2点

(2) まず微分計算をしておきます。

$$\begin{array}{ll} f(x) = \log(1+x) & f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+x} & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -(1+x)^{-2} & f''(0) = -1 \\ f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} & f^{(3)}(0) = 2 \\ f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} & f^{(4)}(0) = -3! \\ f^{(5)}(x) = (-1)^4 4!(1+x)^{-5} & f^{(5)}(0) = 4! \end{array}$$

従って $n = 4$ の時の Taylor の定理によれば、任意の b に対して

$$\log(1+b) = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{5(1+c)^5}b^5$$

となる様な c が 0 と b の間に存在する事が解ります。

F 微分で酷いミス -10点
D 計算ミス -3点

ここで $b = 1$ とすれば

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5(1+c)^5}$$

G $\log 1.02$ を計算している - 8 点

となって、右辺 4 項目までの和を近似値、5 項目を誤差と考えれば、近似値は $\frac{7}{12} = 0.5833\dots$ 、そのときの誤差は $\frac{1}{5(1+c)^5}$ ですが、 $0 < c < 1 = b$ であることから、

$$|(\text{誤差})| = \left| \frac{1}{5(1+c)^5} \right| \leq \frac{1}{5} = 0.2$$

と評価出来るので誤差の限界は 0.2 となります。

B 評価を等号にしているなど - 2 点
C 評価が極めていい加減 - 3 点
E 誤差がない - 5 点
D 計算ミス - 3 点

近似値； $\frac{7}{12} = 0.583\dots$ 誤差の限界； 0.2