

問題 1 ダランベールの判定法：

定理 (d'Alembert's ratio test) 正項級数 $\sum p_n$ において極限值： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n}$ が有限値として存在するとき (その値を r として)、

- (1) $0 \leq r < 1$ ならば $\sum p_n$ は収束し、
 (2) $1 < r < \infty$ ならば $\sum p_n$ は発散します。

また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \infty$ であるときも $\sum p_n$ は発散します。

によって正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{500}}{3^n}$ の収束／発散を判定して下さい。

配点：15点 シラバス達成度目標：ア

解答例 この級数の第 n 項を p_n とすると、 $p_n = \frac{n^{500}}{3^n}$ であって、

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{500}}{3^{n+1}}}{\frac{n^{500}}{3^n}} \\ &= \frac{(n+1)^{500} 3^n}{n^{500} 3^{n+1}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^{500} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{500} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{3} < 1$$

ですから、ダランベールの判定法によりこの (正項) 級数は収束します。

問題 2 $\log(1+x)$ の $x=0$ の周りでのテイラー展開を求めて下さい。

ただし、展開が可能であることは既知とします。

配点：15点 シラバス達成度目標：イ

解答例 $g(x) = \log(1+x)$ と置けば、

$$g(x) = \log(1+x)$$

$$g(0) = 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$g'(0) = 1$$

$$g''(x) = -(1+x)^{-2}$$

$$g''(0) = -1$$

$$g^{(3)}(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

$$g^{(3)}(0) = (-1)(-2)$$

$$g^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$$

$$g^{(4)}(0) = (-1)(-2)(-3)$$

⋮

⋮

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

$$g^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad n \geq 1$$

となっており、

求める展開式は

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!}x^n + \cdots \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \cdots \end{aligned}$$

となります。

問題 3 $f(x) = \sqrt{1+x}$ の $x=3$ でのテイラー展開の 5 次の項までを求め、これを利用して $\sqrt{3}$ の近似値を小数点以下 5 桁まで (6 桁以下切り捨て) 求めて下さい。

ただし、展開が可能であることは既知とします。

と考えると、

$$\begin{aligned} (\text{近似値}) &= 2 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^9} - \frac{5}{2^{14}} - \frac{7}{2^{17}} \\ &= \frac{227025}{131072} \\ &\sim 1.73206 \end{aligned}$$

です (小数点以下 6 桁以下切り捨て)。

配点：15点	シラバス達成度目標：ウ
--------	-------------

解答例 まずは 5 階までの微分を計算しておきましょう。

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1} \\ f''(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-2} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-3} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-4} \\ f^{(5)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\left(\frac{1}{2}-4\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-5} \end{aligned}$$

すると $x=3$ での Taylor 展開の 5 次の項まで (これを $J(x)$ と書きます) は

$$\begin{aligned} J(x) &= f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(3)}{3!}(x-3)^3 + \frac{f^{(4)}(3)}{4!}(x-3)^4 + \frac{f^{(5)}(3)}{5!}(x-3)^5 \\ J(2) &= f(3) + f'(3)(2-3) + \frac{f''(3)}{2!}(2-3)^2 \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(3)}{3!}(2-3)^3 + \frac{f^{(4)}(3)}{4!}(2-3)^4 + \frac{f^{(5)}(3)}{5!}(2-3)^5 \\ &= 2 + \frac{1}{2^2}(-1) - \frac{1}{2^6}(-1)^2 + \frac{1}{2^9}(-1)^3 - \frac{5}{2^{14}}(-1)^4 + \frac{7}{2^{17}}(-1)^5 \end{aligned}$$

となります。この右辺の和を近似値とするわけですからこれを計算すると最後の項を誤差

問題 4 次の極限值：

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

が存在するかどうか調べ、存在するならその極限值も求めて下さい。

問題 5 関数 $w(x,y) = (x^3 + y)^4$ の 2 階までの偏導関数を全て求めて下さい。

配点：20 点 シラバス達成度目標：オ

解答例 まず 1 階の偏導関数は

$$w_x(x,y) = 4(x^3 + y)^3 3x^2 = 12(x^3 + y)^3 x^2$$

$$w_y(x,y) = 4(x^3 + y)^3$$

であり、2 階の偏導関数は

$$\begin{aligned} w_{xx}(x,y) &= 12 \cdot 3(x^3 + y)^2 3x^2 x^2 + 12(x^3 + y)^3 2x \\ &= 108(x^3 + y)^2 x^4 + 24(x^3 + y)^3 x \end{aligned}$$

$$w_{xy}(x,y) = w_{yx}(x,y) = 36(x^3 + y)^2 x^2$$

$$w_{yy}(x,y) = 12(x^3 + y)^2$$

です。

解答例 関数の絶対値をとって極座標にして考えれば

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right| &= \left| \frac{r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \right| \\ &= |r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta| \\ &= r^2 |\cos \theta|^2 |\sin \theta|^2 \end{aligned}$$

ですが、ここで $|\cos \theta| \leq 1, |\sin \theta| \leq 1$ から、

$$\leq r^2$$

となって結局不等式：

$$0 \leq \left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right| \leq r^2$$

が得られますが、ここで各辺で $(x,y) \rightarrow (0,0)$ の極限をとれば左右辺が 0 に収束している
ので中辺も 0 に収束する事が分かり、従って、求める極限值も存在して 0 です。

問題 6 $a(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ 、 $b(v, w) = \frac{1}{2}(v^2 - w^2)$ 、 $c(v, w) = vw$ であるときに

$$A(v, w) = a(b(v, w), c(v, w))$$

で定義される合成関数 $A(v, w)$ の 1 階の偏導関数を求めて下さい。

配点：10点 シラバス達成度目標：力

解答例 まず

$$b^2 + c^2 = \frac{1}{4}(v^2 + w^2)^2$$

に注意しておきます。

各種偏導関数を求めると

$$a_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad a_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$b_v(v, w) = v \quad b_w(v, w) = -w$$

$$c_v(v, w) = w \quad c_w(v, w) = v$$

なので、合成関数の偏微分規則から

$$\begin{aligned} A_v(v, w) &= a_x(b(v, w), c(v, w))b_v(v, w) + a_y(b(v, w), c(v, w))c_v(v, w) \\ &= \frac{4(v^2 - w^2)}{(v^2 + w^2)^2}v + \frac{8vw}{(v^2 + w^2)^2}w \\ &= \frac{4v}{v^2 + w^2} \\ A_w(v, w) &= a_x(b(v, w), c(v, w))b_w(v, w) + a_y(b(v, w), c(v, w))c_w(v, w) \\ &= \frac{4(v^2 - w^2)}{(v^2 + w^2)^2}(-w) + \frac{8vw}{(v^2 + w^2)^2}v \\ &= \frac{4w}{v^2 + w^2} \end{aligned}$$

となります。

問題 7 曲線 $F(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) におけるこの曲線の法線方向ベクトルは

$$\text{grad}F(a, b) = \begin{pmatrix} F_x(a, b) \\ F_y(a, b) \end{pmatrix}$$

で与えられることを、曲線の上を動く点の運動 $(x(t), y(t))$ を使って大まかに説明して下さい。ただし、点 (a, b) は特異点ではないとします。

配点：10点 シラバス達成度目標：力

解答例 ある質点の運動 $(x(t), y(t))$ があって、この質点は常に曲線 $F(x, y) = 0$ 上を動いており、 $t = T$ での位置が点 (a, b) であるものとします。

このとき任意の t について

$$F(x(t), y(t)) = 0$$

が成り立っているので両辺を t で微分すると、合成関数の微分法則から

$$0 = F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t) = \begin{pmatrix} F_x(x(t), y(t)) \\ F_y(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

となります。特に $t = T$ では

$$0 = \begin{pmatrix} F_x(x(T), y(T)) \\ F_y(x(T), y(T)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(T) \\ y'(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(a, b) \\ F_y(a, b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(T) \\ y'(T) \end{pmatrix}$$

となりますから、最後の内積の形から分かるようにベクトル $\begin{pmatrix} F_x(a, b) \\ F_y(a, b) \end{pmatrix}$ は質点の点 (a, b) での速度ベクトル $\begin{pmatrix} x'(T) \\ y'(T) \end{pmatrix}$ と直交しています。

質点の運動においてその速度ベクトルは常に運動の接線方向を向いていますから結局、ベクトル $\begin{pmatrix} F_x(a, b) \\ F_y(a, b) \end{pmatrix}$ は曲線 $F(x, y) = 0$ 上の各点 (a, b) においてこの曲線の法線ベクトルである事が分かります。