

問題 1 2つのべき級数

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots, \quad 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

の積を形式的に計算して、次数の低い方から x^7 の項まで求めてください。

配点：15点 シラバス達成度目標：イ

解答例

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \right) \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \right) \\ &= x - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \right) x^3 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!2!} + \frac{1}{5!} \right) x^5 - \left(\frac{1}{6!} + \frac{1}{3!4!} + \frac{1}{5!2!} + \frac{1}{7!} \right) x^7 + \cdots \\ &= x - \frac{4}{3!}x^3 + \frac{10+20+2}{5!2!}x^5 - \frac{42+210+126+6}{7!3!}x^7 + \cdots \\ &= x - \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^4}{5!}x^5 - \frac{2^6}{7!}x^7 + \cdots \\ &= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{4}{315}x^7 + \cdots \end{aligned}$$

問題 2 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ は収束するでしょうか。

配点：15点 シラバス達成度目標：ア

解答例 隣接項の比を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^n}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (\text{as } n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ですから、d'Alembert の判定法によりこの正項級数は収束します。

問題 3 べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^3} x^n$ の収束半径を求めてください。

配点：15点 シラバス達成度目標：ア

解答例 x^n の係数を a_n とおけば、

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{\frac{1}{2^n n^3}}{\frac{1}{2^{n+1} (n+1)^3}} \\ &= \frac{(n+1)^3 2^{n+1}}{n^3 2^n} \\ &= 2 \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 \\ &\rightarrow 2 \quad (\text{as } n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ですから、この級数の収束半径は2です。

問題 4 等比級数の和の公式を使って関数 $\frac{2}{3-x}$ を $x-1$ のべき級数に展開してください。

配点：15点 シラバス達成度目標：イ

解答例

$$\begin{aligned} \frac{2}{3-x} &= \frac{2}{3-(x-1)-1} \\ &= \frac{2}{2-(x-1)} \\ &= \frac{1}{1-\frac{x-1}{2}} \end{aligned}$$

ですから、等比級数の和の公式から、 $\left| \frac{x-1}{2} \right| < 1$ の範囲内で

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{x-1}{2} + \left(\frac{x-1}{2} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{x-1}{2} \right)^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2^2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{1}{2^n}(x-1)^n + \cdots \end{aligned}$$

と展開されます。成立する範囲を詳しく見ると

$$|x-1| < 2, \quad \text{すなわち} \quad -1 < x < 3$$

です。

問題 5 次の各関数の指定された点のまわりでの Taylor 展開を求めてください。ただし、展開の可能性は既知とします。

(1) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 、 $x = 0$ のまわりで。

(2) $g(x) = \log x$ 、 $x = 1$ のまわりで。

配点：各 15 点 シラバス達成度目標：イ

解答例 (1) まず微分計算をすると

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad f''(0) = 1$$

となつて後は周期的に繰り返すことが分かります。従つて

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases}$$

ですから、求める展開は

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

となります。

(2) 同様にまず微分計算をすると

$$g(x) = \log x \quad g(1) = 0$$

$$g'(x) = x^{-1} \quad g'(1) = 1$$

$$g''(x) = (-1)x^{-2} \quad g''(1) = -1$$

$$g^{(3)}(x) = (-1)(-2)x^{-3} \quad g^{(3)}(1) = (-1)(-2)$$

$$g^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} \quad g^{(4)}(1) = (-1)(-2)(-3)$$

となりますから、一般には $n \geq 1$ のとき

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}, \quad g^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

となることが分かります。従つて求める展開式は

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n + \cdots$$

です。

問題 6 次の定理：

Taylor の定理 (J.Gregory, 1671 ; B.Taylor, 1712)

$f(x)$ が何回でも微分出来るとき、任意の $a \neq b$ と任意の正の整数 n に対して

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n}_{\text{近似値}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在する。

を使って、Napier 数 e の値を小数点以下 5 桁まで正確に求めてください。ただし、 $2 < e < 3$ である事は知っているものとします。

配点：10 点 シラバス達成度目標：ウ

解答例 $f(x) = e^x$ に対して Taylor の定理を適用すると、任意の正の整数 n と任意の $a \neq b$ に対して

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

となる様な c が a と b の間に存在します。そこで $a = 0, b = 1$ の場合を考えれば $f^{(j)}(x) = e^x$ であって $f^{(j)}(0) = 1$ であることに注意して

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

となる様な c が 0 と 1 の間に存在します。

そこで右辺の第 n 項までを近似値、最後の項を誤差とすると、誤差が小数点以下 5 桁目に影響を与えないぐらい小さくなるように n を選ばなくてはなりません。誤差は

$$|(\text{誤差})| \leq \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e^1}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

と評価されますから階乗を計算してみると

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, 6! = 720,$$

$$7! = 5040, \quad 8! = 40320, \quad 9! = 362880, \quad 10! = 3628800$$

ですから、 $n = 9$ で計算してみると

$$|(\text{誤差})| \leq \frac{3}{10!} = \frac{3}{3628800} < \frac{3}{3600000} = \frac{1}{1200000} = 0.000000833 \dots$$

となっていて良さそうです。近似値も計算してみると

$$\begin{aligned} (\text{近似値}) &= 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} \\ &= 2 + \frac{9 \cdot 8 \cdots 3 + 9 \cdot 8 \cdots 4 + \cdots + 9 + 1}{9!} \\ &= 2 + \frac{181440 + 60480 + 15120 + 3024 + 504 + 72 + 9 + 1}{362880} \\ &= 2 + \frac{260650}{362880} \\ &= 2.71828152 \dots \end{aligned}$$

ですから、

$$|(\text{誤差})| < 0.0000009$$

$$-0.0000009 < e - (\text{近似値}) < 0.0000009$$

$$(\text{近似値}) - 0.0000009 < e < (\text{近似値}) + 0.0000009$$

$$2.71828152 - 0.0000009 < e < 2.71828153 + 0.0000009$$

$$2.71828062 < e < 2.71828243$$

が成り立ち、従って Napier 数の正しい小数点以下 5 桁は 2.71828 であることが分かりました。