

問題 1 次の級数：

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

が収束するような実定数 p の範囲を求めて下さい。

配点：5 点 シラバス達成度目標：ア

解答例 まず、級数が収束するならば項は 0 に収束しなければならないので、 $p \leq 0$ の場合は収束しません。

また、調和級数は発散しますから、 $0 < p \leq 1$ の場合は

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$$

からやはり発散します。

最後に $1 < p$ のケースですが、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} &= 1 + \int_1^2 \frac{1}{x^p} dx + \int_2^3 \frac{1}{x^p} dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx \\ &= 1 + \int_1^2 \frac{1}{x^p} dx + \int_2^3 \frac{1}{x^p} dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx \\ &\leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \\ &= 1 + \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right]_1^n \\ &= 1 + \frac{1}{-p+1} (n^{-p+1} - 1) \\ &\leq 1 + \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

によれば部分和からなる数列は有界であって $+\infty$ に発散する事はありません。

正項級数は $+\infty$ に発散するか収束するかどちらかしかりませんから、これは収束します。

以上から収束するのは $1 < p$ の場合のみ。

問題 2 関数 $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ の $x = 0$ の周りでのテイラー展開 (つまり、マクローリン展開) を求めて下さい。

ただし、展開が可能であることは既知とします。

配点：10 点 シラバス達成度目標：イ

解答例

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

の x を $-\frac{1}{2}x^2$ で置き換えれば

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!2^2}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!2^n}x^{2n} + \cdots$$

です。

問題 3 関数 $f(x) = \sqrt{1+x}$ に対して次の定理：

Taylor の定理

$f(x)$ が何回でも微分出来るとき、任意の $a \neq 0$ に対して

$$f(a) = \underbrace{f(0) + f'(0)a + \frac{1}{2!}f''(0)a^2}_{\text{近似値}} + \underbrace{\frac{f^{(3)}(b)}{3!}a^3}_{\text{誤差}}$$

となる様な b が 0 と a の間に存在する。

を使って、 $\sqrt{2}$ の近似値とその場合の誤差の限界（誤差の絶対値を上から評価したもの）を求めて下さい。

配点：10点 シラバス達成度目標：ウ

解答例 まず微分計算をしておきます。

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) (1+x)^{\frac{1}{2}-2}$$

$$f''(0) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) (1+x)^{\frac{1}{2}-3}$$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(b) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) (1+b)^{\frac{1}{2}-3} \\ &= \frac{3}{8}(1+b)^{\frac{1}{2}-3} \end{aligned}$$

すると上の定理から ($a = 1$ とする)

$$\sqrt{2} = f(1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}(1+b)^{-\frac{5}{2}}$$

となるような b が 0 と 1 の間に存在するので、右辺第 3 項までを近似値、第 4 項を誤差とすれば、

$$(\text{近似値}) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{11}{8} = 1.375$$

$$|(\text{誤差})| = \frac{1}{16} \frac{1}{(1+b)^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{1}{16} = 0.0625$$

が分かります。

従って求める近似値は 1.375、誤差の限界は 0.0625 です。

問題 4 次の極限值：

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$$

が存在するかどうか調べ、存在するならその極限值も求めて下さい。

配点：20点 シラバス達成度目標：エ

解答例 x -軸上（原点除く）での関数値は

$$\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{x^3}{x^3} = 1$$

ですので、この軸に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけてゆくと極限值は 1 です。一方 y -軸上（原点除く）での関数の値は

$$\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = -\frac{y^3}{y^3} = -1$$

と云う風に一定値 -1 ですので、この軸に沿った極限值は -1 になります。

この様に近づき方によって収束値が異なるのでこの極限值は存在しません。

問題 5 関数 $m(x, y) = x^2 e^{x+y}$ の 2 階までの偏導関数を全て求めて下さい。

配点：20点 シラバス達成度目標：オ

解答例

$$\begin{aligned} m_x(x, y) &= 2x e^{x+y} + x^2 e^{x+y} \\ &= (2x + x^2) e^{x+y} \end{aligned}$$

$$m_y(x, y) = x^2 e^{x+y}$$

$$\begin{aligned} m_{xx}(x, y) &= (2 + 2x) e^{x+y} + (2x + x^2) e^{x+y} \\ &= (2 + 4x + x^2) e^{x+y} \end{aligned}$$

$$m_{xy}(x, y) = (2x + x^2) e^{x+y}$$

$$m_{yy}(x, y) = x^2 e^{x+y}$$

問題 6 関数 $k(x, y) = 2x^2 + 3xy - y^2$ に対して、 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ としたときに k_r, k_θ (k を r, θ 変数の関数と見た時の偏導関数) を求めて下さい。

配点：15 点 シラバス達成度目標：力

解答例 $K(r, \theta) = k(r \cos \theta, r \sin \theta)$ と置くと、

$$K(r, \theta) = 2r^2 \cos^2 \theta + 3r^2 \cos \theta \sin \theta - r^2 \sin^2 \theta = r^2(2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta)$$

なので K_r, K_θ を計算すると

$$K_r(r, \theta) = 2r(2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\begin{aligned} K_\theta(r, \theta) &= r^2(-4 \cos \theta \sin \theta - 3 \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= -3r^2(2 \cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

となります。

問題 7 曲線 $y = 4x^2$ 上の点 $(c, 4c^2)$ における接線と法線の方程式 (あるいはパラメータ表示された方程式) を求めて下さい。

配点：20 点 シラバス達成度目標：オ

解答例 $G(x, y) = 4x^2 - y$ と置けばこの曲線は $G(x, y) = 0$ と表すことが出来、

$$\text{grad}G(x, y) = \begin{pmatrix} 8x \\ -1 \end{pmatrix}$$

ですから、点 $(c, 4c^2)$ での法線の方法ベクトルは $\begin{pmatrix} 8c \\ -1 \end{pmatrix}$ です。従ってまず法線の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 4c^2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8c \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメーター})$$

となります。また接線はこの法線ベクトルに垂直ですから

$$8c(x - c) - 1(y - 4c^2) = 0, \quad \text{すなわち、} \quad y = 8cx - 4c^2$$

となります。