問題 **1** $\sqrt{1-x^2}=1+a_1x+a_2x^2+\cdots$ と置いてこれの自乗の展開式を左右辺で係数比較して a_1,a_2,a_3,a_4 を求め、$\sqrt{1-x^2}$ のべき級数展開を４次の項まで求めて下さい。

配点：１０点	シラバス達成度目標：イ

【解答例】　$\sqrt{1-x^2}=1+a_1x+a_2x^2+\cdots$ と置いて両辺を自乗すれば

$$
\begin{aligned}
1-x^2 &= (1+a_1x+a_2x^2+\cdots)(1+a_1x+a_2x^2+\cdots)\\
&= 1+(a_1+a_1)x+(a_2+a_1^2+a_2)x^2\\
&\qquad +(a_3+a_1a_2+a_2a_1+a_3)x^3+(a_4+a_1a_3+a_2^2+a_3a_1+a_4)x^4+\cdots
\end{aligned}
$$

ですから、まず $a_1+a_1=0$ から $a_1=0$ であることが分かります。更に

$$-1=2a_2+a_1^2=2a_2$$
$$a_2=-\frac{1}{2}$$

$$0=2a_3+2a_1a_2=2a_3$$
$$a_3=0$$

$$0=2a_4+2a_1a_3+a_2^2=2a_4+\frac{1}{4}$$
$$a_4=-\frac{1}{8}$$

- **重大ミス　－５点**
- **計算ミスが多い　－５点**
- **計算ミス少し　－３点**
- **少しの計算のみ　２点**

などと順に係数が決定しますので

$$\sqrt{1-x^2}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots$$

となります。

問題 **2** （１）級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}$ が収束するかどうかダランベールの判定法によって調べて下さい。

（２）ダランベールの判定法では収束判定が出来ない正項級数の例を挙げて下さい。

配点：（１）１０点、（２）３点	シラバス達成度目標：ア

【解答例】　（１）隣接項の比は

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{2^n}{\sqrt{n}}}=\frac{2^{n+1}\sqrt{n}}{2^n\sqrt{n+1}}=2\sqrt{\frac{n}{n+1}}=2\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}$$

であり、これは $n\to\infty$ で 2 に収束します。従ってダランベールの判定法により問題の級数は収束せず、$+\infty$ に発散します。

- **計算のみで結論なし　５点**
- **計算はOKで結論ミス　６点**
- **計算ミス　－３点**
- **表現不十分　－２点**
- **少しの計算のみ　３点**

（２）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n$ など。

問題 **3** 次の各文章が正しいかどうか ○／× のみで答えて下さい。

（１）$x = b$ で収束する x のべき級数は $x = b$ で絶対収束します。

（２）調和級数は収束します。

（３）２つの正項級数 $\sum v_n, \sum w_n$ があって、$\sum w_n$ は $+\infty$ に発散しており、また任意の n について $v_n < w_n$ であるとします。このとき $\sum v_n$ も $+\infty$ に発散します。

配点：各５点	シラバス達成度目標：ア

【解答例】　（１）×、（２）×、（３）×。

- **部分点なし**

問題 **4** べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{5^n n^3}$ の収束半径を求めて下さい。

配点：１０点	シラバス達成度目標：ア

【解答例】　n 次の項の係数を p_n とすれば、

$$\left|\frac{p_n}{p_{n+1}}\right| = \left|\frac{\frac{1}{5^n n^3}}{\frac{1}{5^{n+1}(n+1)^3}}\right| = 5\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \to 5 \quad (\text{ as } n \to \infty \text{ })$$

ですから、求める収束半径は 5 です。

- **x-1 を入れたまま計算　−３点**
- **分子・分母が逆　−２点**
- **計算ミスが少し　−２点**
- **重大ミス　−４点**
- **少しの計算のみ　３点**

問題 **5** 等比級数の和の公式を上手く変形して次の関数を指定された点のまわりでべき級数に展開して下さい。

（１）$\dfrac{1}{1-x^2}$、$x=0$ のまわりで。　（２）$\dfrac{x}{x-1}$、$x=10$ のまわりで。

配点：（１）１５点、（２）１０点	シラバス達成度目標：イ

【解答例】　（１）等比級数の和の公式：

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots$$

において $t=x^2$ とおけば、

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+\cdots$$

が得られます。

- **方法が間違っているもの　−２点**
- **計算ミス　−４点**
- **少しの計算のみ　４点**

（２）まず分子を分母で割って変形すると

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1}&=1+\frac{1}{x-1}\\&=1+\frac{1}{(x-10)+9}\\&=1+\frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{-(x-10)}{9}}\end{aligned}$$

となりますから、等比級数の和の公式から

$$\begin{aligned}&=1+\frac{1}{9}\left(1+\frac{-(x-10)}{9}+\left\{\frac{-(x-10)}{9}\right\}^2+\cdots\right)\\&=\frac{10}{9}-\frac{1}{9^2}(x-10)+\frac{1}{9^3}(x-10)^2-\frac{1}{9^4}(x-10)^3+\cdots\end{aligned}$$

が分かります。

- **方法が違うもの　−２点**
- **計算ミスが多いもの　−５点**
- **計算ミス　−３点**
- **少しの計算のみ　２点**

問題 **6** 関数 $f(x)=\cos x$ の、$x=\frac{\pi}{4}$ でのテイラー展開を求めて下さい。ただし展開可能であることは既知とし、３次の項までは具体的に求め、あとは『＋ $\cdots$ 』で省略して書いて下さい（一般項は必要ありません）。

配点：１５点	シラバス達成度目標：イ

- **微分計算のみ　３点**

【解答例】　まず微分計算をすると

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos x & f\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\\f'(x)&=-\sin x & f'\left(\frac{\pi}{4}\right)&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\f''(x)&=-\cos x & f''\left(\frac{\pi}{4}\right)&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\f^{(3)}(x)&=\sin x & f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

となってこのあとは周期的に繰り返す事になります。

- **全体的に出来ているが、微分係数の計算が酷く間違っているもの　６点**

従って求めるテーラー展開は

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots$$

となります。

- **計算ミス　−３点**
- **重大ミス　−５点**
- **中心の間違い　−２点**
- **表現上のミス　−２点**

問題 **7** （１）３次の項までを近似値とするテイラーの定理を使って $\log 1.02$ の近似値を求め、そのときの誤差の限界も求めて下さい。

【テイラーの定理】
$f(x)$ が何回でも微分出来るとき、任意の $a \neq b$ と任意の正の整数 n に対して

$$f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n}_{\text{近似値}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在する。

（２）近似値を求めるにあたってテイラーの定理が優れている点を述べて下さい。

配点：（１）１０点、（２）２点	シラバス達成度目標：ウ

【解答例】　（１）まず $f(x) = \log(1+x)$ として導関数を求めておきます。

$$f(x) = \log(1+x) \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2} \qquad f''(0) = -1$$
$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} \qquad f^{(3)}(0) = 2$$
$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$$

Taylor の定理によれば、

$$\log(1+b) = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4(1+c)^4}b^4$$

となる様な c が $a = 0$ と b の間に存在する事が解ります。

● この辺りまでしか出来ていないもの　５点

ここで $b = 0.02$ とすれば

$$\log(1.02) = 0.02 - \frac{1}{2}(0.02)^2 + \frac{1}{3}(0.02)^3 - \frac{1}{4(1+c)^4}(0.02)^4$$

となって、近似値は

$$(\text{近似値}) = 0.02 - 0.0002 + \frac{0.000008}{3} = 0.01980266\cdots$$

であり、$a = 0 < c < 0.02 = b$ であることからそのときの誤差は、

$$|(\text{誤差})| = \left|-\frac{1}{4(1+c)^4}(0.02)^4\right| \leq \frac{(0.02)^4}{4} = 0.00000004$$

と評価出来るので誤差の限界は 0.00000004 となります。

近似値；$0.01980266\cdots$　　誤差の限界；0.00000004

● 大体の流れは出来ているが
ミスの多いもの　５点

●少しの計算のみ　２点

● 重大ミス　−４点

● 計算ミス　−３点

● ケアレスミス　−２点

（２）テイラー展開の有限項までを近似値とする場合誤差はそれ以降の無限級数の和となり評価が難しいが、テイラーの定理を使えば誤差は１つの項で表され、評価も容易である。
テイラー展開可能な関数であれば、近似の次数を上げれば誤差の限界を必要なだけ小さくすることが出来る。