問題 **1** 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

（1）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n^2}$　　（2）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

配点：各１０点	シラバス達成度目標：ア

【解答例】　（1）n 次の係数を a_n とおけば

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{3^n n^2}}{\frac{1}{3^{n+1}(n+1)^2}} = 3\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to 3$$

となりますから収束半径は 3 です。

- **表現上の細かいミス　－２点**
- **計算ミス　－３点**
- **絶対値忘れのみ　－２点**
- **ミスが多いもの　－５点**

（2）n 次の係数は $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ですから、

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} \to 1$$

より収束半径は 1 です。 □

問題 **2** 等比級数（幾何級数）の和の公式を使って関数 $\dfrac{2}{x+1}$ を $x=0$ のまわりでべき級数に展開して下さい。

配点：１０点	シラバス達成度目標：イ

【解答例】

$$\frac{2}{x+1} = 2\frac{1}{1-(-x)}$$
$$= 2\{1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots\}$$
$$= 2-2x+2x^2-2x^3+\cdots$$

- **２を忘れたもの　－２点**

□

- **軽い計算ミス　－３点**
- **ミスが多い　－４点**
- **べき級数になっていないなど重大なミス　－５点**

問題 **3** 次の各関数の指定された点のまわりでのテイラー展開を求めて下さい。その際一般項も必ず求めて下さい。ただし展開が可能である事は既知とします。

（１）$f(x) = \cos x, \quad x = 0$ のまわりで。
（２）$g(x) = \log x, \quad x = 1$ のまわりで。

配点：（１）１０点、（２）５点	シラバス達成度目標：イ

【解答例】　（１）まず必要となる導関数、微分係数を求めておきます：

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin x & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \sin x & f'''(0) &= 0 \end{aligned}$$

● **ここまでのみ　５点**

これ以降は 0 階微分からの繰り返しとなる事は明らかです。

● **一般項のマイナスのミス、次数のミス**
－２点

従って求める展開式は

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

● **一般項のないもの　－３点**

となります。

（２）$g(x)$ の微分は

$$\begin{aligned} g(x) &= \log x & g(0) &= 0 \\ g'(x) &= \frac{1}{x} & g'(0) &= 1 \\ g''(x) &= -x^{-2} & g''(0) &= -1 \\ g^{(3)}(x) &= (-1)(-2)x^{-3} & g''(0) &= (-1)(-2) \\ g^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3)x^{-4} & g''(0) &= (-1)(-2)(-3) \\ &\vdots & &\vdots \\ g^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n} & g''(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

となっており、

● **マイナスのミスのみ　－１点**
● **一般項のないもの　－１点**
● **計算ミス　－２点**
● **中心のミスなど重大なミス　－３点**

求める展開式は

$$\begin{aligned} \log x &= (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n + \cdots \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n + \cdots \end{aligned}$$

となります。　□

問題 **4** $h(x)=\sqrt[3]{1+x}$ に対して２次の項までを近似値とするテイラーの定理を適用し、$\sqrt[3]{2}$ の近似値を求め、そのときの誤差の限界も求めて下さい。

【テイラーの定理】

$f(x)$ が何回でも微分出来るとき、任意の $a\neq b$ と任意の正の整数 n に対して

$$f(b)=\underbrace{f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n}_{\text{近似値}}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在する。

配点：５点	シラバス達成度目標：ウ

【解答例】　$h(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ である事に注意します。

２次の近似を行う場合、誤差項には３階微分が現れるので３階までの微分を計算しておきましょう。

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}} \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{\frac{1}{3}-1} \qquad f'(0)=\frac{1}{3}$$

$$f''(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{3}-2} \qquad f''(0)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{3}-3}$$

すると Taylor の定理から、

$$\begin{aligned} f(1)&=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f^{(3)}(c)}{3!}\\ \sqrt[3]{2}&=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{3}-1\right)+\frac{1}{6\cdot 3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)(1+c)^{\frac{1}{3}-3}\end{aligned}$$

となる様な c が 0 と 1 の間に存在します。

この右辺の最初の３項目までの和を近似値、最後の項を誤差と考えると、

$$(\text{近似値})=1+\frac{1}{3}+\frac{-2}{2\cdot 3^2}=\frac{3^2+3-1}{3^2}=\frac{11}{9}=1.22222\ldots$$

であり、また誤差の絶対値は

$$\begin{aligned}|(\text{誤差})|&=\left|\frac{1}{6\cdot 3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)(1+c)^{\frac{1}{3}-3}\right|\\ &=\frac{2\cdot 5}{6\cdot 3^3}\frac{1}{(1+c)^{3-\frac{1}{3}}}\\ &\leq\frac{5}{81}\\ &\leq 0.06173\end{aligned}$$

と評価されます。 □

● **全体の流れが良ければ　最低限３点**

● **近似値と誤差の限界の一方だけミス　−１点**

問題 **5** 次の極限値：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+3y^2}$$

が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

配点：１０点	シラバス達成度目標：エ

【解答例】　x-軸上（ただし原点は除く）では関数は

$$\frac{xy}{x^2+3y^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

と云う風に一定値 0 なので、x-軸に沿って $(x,y)\to(0,0)$ としたとき関数値は 0 に収束します。

また、y-軸上（ただし原点は除く）でも

$$\frac{xy}{x^2+3y^2} = \frac{0}{3y^2} = 0$$

と云う風に一定値 0 なので、y-軸に沿って $(x,y)\to(0,0)$ としたとき関数値も 0 に収束します。

● ここまで出来ていれば 最低限　６点

● 計算ミス　－３点

しかし、直線 $y=x$ 上（ただし原点は除く）では

$$\frac{xy}{x^2+3y^2} = \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

となっており、この直線に沿った極限値は $\frac{1}{4}$ になって仕舞います。

以上から、異なる近づけ方で収束値が違っているため、問題の極限値は存在しません。 □

● 表現の不十分さ　－２点

問題 **6** 次の各関数の２次までの偏導関数を求めて下さい。

（１）$w(x,y)=\log(x^2y)$

（２）$v(x,y)=(x^2+y)^3$

配点：（１）１０点（２）５点	シラバス達成度目標：オ

【解答例】　（１）まず変形すると

$$w(x,y) = 2\log x + \log y$$

ですから、

$$w_x = \frac{2}{x}$$
$$w_y = \frac{1}{y}$$
$$w_{xx} = -\frac{2}{x^2}$$
$$w_{xy} = w_{yx} = 0$$
$$w_{yy} = -\frac{1}{y^2}$$

が分かります。

● １次のみ　４点

● マイナス（符号）のミス　－２点

● 計算ミス　－３点

● ミスが多い　－５点

（２）

$$v_x = 3(x^2+y)^2(2x)$$
$$v_y = 3(x^2+y)^2$$
$$v_{xx} = 6(x^2+y)^2 + 6x\cdot 2(x^2+y)(2x) = 6(x^2+y)(5x^2+y)$$
$$v_{xy} = v_{yx} = 6x\cdot 2(x^2+y) = 12x(x^2+y)$$
$$v_{yy} = 6(x^2+y)$$

□

● １次のみ　２点

● ミスが少ないもの　４点

問題 **7** 次の各合成関数の導関数あるいは偏導関数を求めて下さい。

（１）$a(x,y)=x^2-3y^2,\quad x=\cos t,\quad y=2\sin t$

（２）$b(x,y)=\sin(x^2+y^2),\quad x=v+w,\quad y=vw$

配点：（１）１０点（２）５点	シラバス達成度目標：カ

【解答例】　（１）$A(t)=a(x(t),y(t))$ と置けば、

$$A(t)=\cos^2 t-12\sin^2 t$$

● この変形まで　５点

なので、

$$A'(t)=-2\cos t\sin t-24\sin t\cos t=-26\sin t\cos t$$

が得られます。

- **符号ミスのみ　－２点**
- **計算ミス　－３点**
- **重大なミス　－４点**
- **x、yのまま　－３点**

（２）$B(v,w)=b(x(v,w),y(v,w))$ と置けば、

$$B_v=b_xx_v+b_yy_v,\quad B_w=b_xx_w+b_yy_w$$

ですから、

- **符号ミスのみ　－１点**
- **計算ミス　－２点**
- **重大なミス　－３点**

$$\begin{aligned}B_v&=\{2x\cos(x^2+y^2)\}\cdot 1+\{2y\cos(x^2+y^2)\}w\\&=2(v+w+vw^2)\cos\{(v+w)^2+v^2w^2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_w&=\{2x\cos(x^2+y^2)\}\cdot 1+\{2y\cos(x^2+y^2)\}v\\&=2(v+w+v^2w)\cos\{(v+w)^2+v^2w^2\}\end{aligned}$$

が得られます。□

● 正しいが x、y のまま　４点

問題 **8** 方程式 $x^2(x+3)=y^2$ の表す曲線について以下の問いに答えて下さい。

（１）曲線上の点 $(1,2)$ における接線の方程式を求めて下さい。

（２）この曲線の特異点を求めて下さい。なければないと答えて下さい。

配点：各５点	シラバス達成度目標：オ

【解答例】　（１）$F(x,y)=x^2(x+3)-y^2$ と置けば問題の曲線は $F(x,y)=0$ と表されます。ここで

$$F_x=3x^2+6x,\qquad F_y=-2y$$

である事によれば

$$\mathrm{grad}F(1,2)=\begin{pmatrix}9\\-4\end{pmatrix}$$

であって、これが問題の点に於ける曲線の法線ヴェクターなので求める接線は

$$9(x-1)-4(y-2)=0,\quad \text{すなわち、}\quad 9x-4y-1=0$$

である事が分かります。

- **全体の流れが出来ていれば　３点**
- **直線の式になっていない（係数に変数が入っているなど）　２点**
- **係数の軽いミスのみ　４点**

（２）$F_x=F_y=F=0$ となる点を求めれば良く、それは連立方程式：

$$\begin{cases}x(x+2)=0\\y=0\\x^2(x+3)=y^2\end{cases}$$

● (0,0) が指摘されていれば　４点

の解ですが、第２式から $y=0$ であって、このとき第１、３両式を満たすのは $x=0$ のみ（$x=-2,-3$ は不適）ですから、求める特異点は $(0,0)$ のみです。□