

問題 1 $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2 = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$ となるように a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 を求めて下さい。

配点: 10 点 シラバス達成度目標: イ

【解答例】

少しの展開計算のみ 3 点

$$\begin{aligned} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2 \\ &= a_0^2 + 2a_0a_1x + (2a_0a_2 + a_1^2)x^2 \\ &\quad + (2a_0a_3 + 2a_1a_2)x^3 + (2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2)x^4 + \cdots \end{aligned}$$

ですから、まず $a_0^2 = 1$ から $a_0 = \pm 1$ です。

【 $a_0 = 1$ の場合】

$-1 = 2a_0a_1 = 2a_1$ ですから $a_1 = -\frac{1}{2}$ です。

更に $1 = 2a_0a_2 + a_1^2 = 2a_2 + \frac{1}{4}$ によれば $a_2 = \frac{3}{8}$ です。

次に $-1 = 2a_0a_3 + 2a_1a_2 = 2a_3 - \frac{3}{8}$ から $a_3 = -\frac{5}{16}$ が分かり、最後に $1 = 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 = 2a_4 + \frac{5}{16} + \frac{9}{64}$ から $a_4 = \frac{35}{128}$ が得られます。

マイナスの場合の計算がないだけのもの - 2 点
更にその他の計算ミスがあるもの - 4 点

計算ミス - 3 点
重大なミス - 5 点
記述上の軽いミス - 1 点

結論が『収束しない』になっているもの 6 点

【 $a_0 = -1$ の場合】

この場合は明らかに符合のみ変わります。

以上から求める値は、

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = \left(\pm 1, \mp \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{8}, \mp \frac{5}{16}, \pm \frac{35}{128} \right) \quad (\text{複号同順})$$

です。

問題 2 次の正項級数が収束するかどうかダランベールの判定法によって調べて下さい。

$$\begin{aligned} (1) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \\ (2) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2^n)^2}{5^n} \end{aligned}$$

配点: 各 10 点 シラバス達成度目標: ア

『0 に収束する』と書いているもの - 1 点

【解答例】 (1) 隣接項の比をとると

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 \quad (\text{as } n \rightarrow \infty)$$

計算ミス - 3 点

となりますからこの正項級数は収束します。

ある程度計算して途中までのもの 6 点

この項が正しく求められていれば 5 点
ここでミスのあるもの 3 ~ 4 点

(2) 隣接項の比をとると

$$\begin{aligned} \frac{\frac{(n+1+2^{n+1})^2}{5^{n+1}}}{\frac{(n+2^n)^2}{5^n}} &= \frac{(n+1+2^{n+1})^2 5^n}{(n+2^n)^2 5^{n+1}} \\ &= \left(\frac{n+1+2^{n+1}}{n+2^n} \right)^2 \frac{1}{5} \\ &= \left(\frac{\frac{n+1}{2^n} + 2}{\frac{n}{2^n} + 1} \right)^2 \frac{1}{5} \\ &\rightarrow \frac{4}{5} \quad (\text{as } n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

途中の計算ミス - 3 点

最後の段階のミス - 2 点

となりますからこの正項級数は収束します。

『4/5 に収束する』などと書いているもの - 1 点

問題 3 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n} (x-2)^n$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

配点: 各 10 点 | シラバス達成度目標: ア

【解答例】 (1) n 次の係数を a_n とすると

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^2 \rightarrow 1 \quad (\text{as } n \rightarrow \infty)$$

ですから、収束半径は 1 です。

(2) n 次の係数を b_n とすると

$$\left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{3^n n}}{\frac{1}{3^{n+1}(n+1)}} = \frac{3^{n+1}(n+1)}{3^n n} = 3 \frac{n+1}{n} \rightarrow 3 \quad (\text{as } n \rightarrow \infty)$$

ですから収束半径は 3 です。

(3) n 次の係数を c_n とすると

$$\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \rightarrow \infty \quad (\text{as } n \rightarrow \infty)$$

ですから収束半径は ∞ です。

中心のずれの処理のミス - 2 点

絶対値の抜け - 1 点

『発散する』あるいは
『収束半径なし』としたもの 6 点

問題 4 等比級数の和の公式を上手く変形して関数 $\frac{3}{x-1}$ を $x=9$ のまわりでべき級数に展開して下さい。

配点: 10 点 | シラバス達成度目標: イ

【解答例】

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-1} &= \frac{3}{(x-9)-1+9} \\ &= \frac{3}{8+(x-9)} \\ &= \frac{3}{8} \frac{1}{1+\frac{x-9}{8}} \\ &= \frac{3}{8} \left\{ 1 - \left(\frac{x-9}{8} \right) + \left(\frac{x-9}{8} \right)^2 - \left(\frac{x-9}{8} \right)^3 + \cdots \right\} \\ &= \frac{3}{8} - \frac{3}{8^2}(x-9) + \frac{3}{8^3}(x-9)^2 - \frac{3}{8^4}(x-9)^3 + \cdots + \frac{3(-1)^n}{8^{n+1}}(x-9)^n + \cdots \end{aligned}$$

全体に -1 が掛かっているミス - 1 点

『+...』が無いなど記法上のミス - 1 点

計算ミス - 3 点

分子分母逆転など重大なミス - 5 点

『=』と『→』の混同など
記法上のミス - 1 点

少しの変形のみ 3 点

計算ミス - 3 点

重大な変形ミス - 5 点

問題 5 関数 $f(x) = \cos x$ の、 $x = \frac{\pi}{3}$ でのテイラー展開を求めて下さい。ただし展開可能であることは既知とし、4 次の項までは具体的に求め、あとは『+ ...』で省略して書いて下さい（一般項は必要ありません）。

配点：10 点 シラバス達成度目標：イ

【解答例】 $f(x) = \cos x$ としてまず必要となる導関数、微分係数を求めておきます：

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \\ f'(x) &= -\sin x & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ f''(x) &= -\cos x & f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} \\ f^{(3)}(x) &= \sin x & f^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

これ以降は繰り返しとなる事は明らかです。

記述の軽いミス - 1 点
計算ミス - 3 点
級数の形式上の重要なミス
(係数が定数でない、中心が違う、など) - 5 点

従って、求める Taylor 展開は、

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2! \cdot 2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{3! \cdot 2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{4! \cdot 2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + \dots$$

となります。

問題 6 関数 $f(x) = \log(x+1)$ に対して、 $x=0$ のまわりで 4 次の項までを近似値とするテイラーの定理を使って $\log 1.02$ の近似値を求め、そのときの誤差の限界も求めて下さい。

配点：20 点 シラバス達成度目標：イ、ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(x+1) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= (x+1)^{-1} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= (-1)(x+1)^{-2} & f''(0) &= -1 \\ f^{(3)}(x) &= (-1)(-2)(x+1)^{-3} & f^{(3)}(0) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4} & f^{(4)}(0) &= -6 \\ f^{(5)}(x) &= (-1)(-2)(-3)(-4)(x+1)^{-5} \end{aligned}$$

Taylor の定理によれば

$$\begin{aligned} f(0.02) &= f(0) + f'(0)(0.02) + \frac{1}{2!} f''(0)(0.02)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)(0.02)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)(0.02)^4 + \frac{1}{5!} f^{(5)}(c)(0.02)^5 \\ \log(1.02) &= 0.02 - \frac{1}{2}(0.02)^2 + \frac{1}{3}(0.02)^3 - \frac{1}{4}(0.02)^4 + \frac{1}{5}(c+1)^{-5}(0.02)^5 \end{aligned}$$

となるような実数 c が $0 < c < 0.02$ の範囲内に存在します。そこで右辺第 4 項までの和を近似値とすれば

$$\begin{aligned} (\text{近似値}) &= 0.02 + \frac{-6(0.02)^2 + 4(0.02)^3 - 3(0.02)^4}{12} \\ &= 0.02 + (0.02)^2 \frac{-6 + 0.08 - 3(0.02)^2}{12} \\ &= 0.01980262666 \dots \end{aligned}$$

であり、このときの誤差は

$$|(\text{誤差})| = \frac{(0.02)^5}{5(c+1)^5} < \frac{(0.02)^5}{5} = 0.00000000064$$

と評価されます。

微分計算のみ 5 点

微分計算のみ 8 点
少しの計算のみ 3 点

計算ミス - 5 点
ミスが複数あるもの - 10 点
ケアレスミス
(写し間違い等) - 2 点

近似値の桁数が
少なすぎるもの - 2 点