

問題 1 $F(x, y) = (x^2 + 2y)^2 - 4x^2(x - 2)(x + y)$ とするとき、以下の問いに答えて下さい。

(1) $F(x, y)$ の偏導関数を求めて下さい。

(2) $x = 0$ のとき、 $x = 2$ のとき、あるいは $x + y = 0$ のときに F_x が 0 であることを確認して下さい。もしそうでなかったなら、(1) の計算を間違えたと思うことになりますのでやり直して下さい。

(3) 曲線 $F(x, y) = 0$ 上の特異点、つまり、連立方程式：

$$\begin{cases} F_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$$

を満たす点を全て求めて下さい。

(3) $x = 0$ のとき、第 1 式は満たされており、また第 2 式によれば $y = 0$ でもある必要があります。この場合第 3 式も満たされており、 $(0, 0)$ は解の 1 つです。

$x \neq 0$ のとき、更に $x = 2$ であれば第 1 式は満たされます。このとき第 2 式から $y = -2$ が得られます。この点は第 3 式も満たしていますから $(2, -2)$ も解の 1 つです。

$x \neq 0, 2$ の場合は第 1 式から $y = -x$ でなければならず、これを第 2 式に代入して

$$0 = -4x^3 + 12x^2 - 8x = -4x(x^2 - 3x + 2) = -4x(x - 1)(x - 2)$$

から $x = 1, y = -1$ が得られます。しかしこの点は第 3 式を満たしません。

以上から特異点は 2 点 $(0, 0), (2, -2)$ です。

□

配点：(1) (2) 20 点、(3) 5 点	シラバス達成度目標：オ
-------------------------	-------------

【解答例】 (1)、(2)

$$\begin{aligned} F_x &= 2(x^2 + 2y)(2x) - 8x(x - 2)(x + y) - 4x^2(x + y) - 4x^2(x - 2) \\ &= 4x^3 + 8xy - 8x(x^2 + xy - 2x - 2y) - 4x^3 - 4x^2y - 4x^3 + 8x^2 \\ &= 8xy - 8x(x^2 + xy - 2x - 2y) - 4x^2y - 4x^3 + 8x^2 \\ &= 24xy - 12x^3 - 12x^2y + 24x^2 \\ &= 12x(2y - x^2 - xy + 2x) \\ &= 12x\{2(x + y) - x(x + y)\} \\ &= 12x(x + y)(2 - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y &= 2(x^2 + 2y)2 - 4x^2(x - 2) \\ &= -4x^3 + 12x^2 + 8y \end{aligned}$$

問題 2 $G(x, y) = x^2 - 5y^2 - 1$ とするとき、曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 $(9, -4)$ における接線の方程式を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：オ

【解答例】

$$G_x = 2x, \quad G_y = -10y$$

ですから題意の点に於ける曲線の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$ です。従って求める接線の方程式は

$$18(x - 9) + 40(y + 4) = 0$$

もしくは、変形して

$$9x + 20y - 1 = 0$$

$$y = -\frac{9}{20}x + \frac{1}{20}$$

$$y + 4 = -\frac{9}{20}(x - 9)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 40 \\ -18 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

です。

□

問題 3 次の極限值が存在するかどうか調べて下さい。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

配点：各 10 点 シラバス達成度目標：エ

【解答例】 (1) x -軸上（原点は除く）での関数の値は一定値 0 であり、 x -軸に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ としたとき関数値は 0 に収束します。
一方直線 $y = x$ 上では（原点は除く）関数値は常に

$$\frac{x^2 y}{x^3 + y^3} = \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

であって、この直線に沿った極限值は $\frac{1}{2}$ になります。

以上から題意の極限值は存在しません。

(2) まず y -軸上以外の部分で

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2} \right| = |y|$$

が成り立っており、また、 y -軸上（ただし原点は除く）でも

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{0}{y^2} \right| = 0 \leq |y|$$

ですから、結局、原点以外で

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y|$$

が成り立っています。ここで各辺の $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ の極限を考えれば、左辺と右辺が共に 0 に収束するので、中辺も 0 に収束すると言えます。従って問題の極限值は存在して 0 です。

□

問題 4 $C(x, y) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2x) - y^2$ において $x = r \cos t, y = r \sin t$ としたときに C を r, t の関数と考えて偏導関数 C_r, C_t を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：力

【解答例 その 1】

$$C_x = 2x(x^2 + y^2 - 2x) + (x^2 + y^2)(2x - 2) = (x^2 + y^2)(4x - 2) - 4x^2$$

$$C_y = 2y(x^2 + y^2 - 2x) + (x^2 + y^2)(2y) - 2y = 2y(2x^2 + 2y^2 - 2x - 1)$$

$$x_r = \cos t$$

$$x_t = -r \sin t$$

$$y_r = \sin t$$

$$y_t = r \cos t$$

ですから、

$$\begin{aligned} C_r &= C_x x_r + C_y y_r \\ &= \{(x^2 + y^2)(4x - 2) - 4x^2\} \cos t + 2y(2x^2 + 2y^2 - 2x - 1) \sin t \\ &= \{r^2(4r \cos t - 2) - 4r^2 \cos^2 t\} \cos t + 2r \sin^2 t(2r^2 - 2r \cos t - 1) \\ &= 4r^3 \cos^2 t - 2r^2 \cos t - 4r^2 \cos^3 t + 4r^3 \sin^2 t - 4r^2 \sin^2 t \cos t - 2r \sin^2 t \\ &= 4r^3 - 2r^2 \cos t - 4r^2 \cos t - 2r \sin^2 t \\ &= 4r^3 - 6r^2 \cos t - 2r \sin^2 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_t &= C_x x_t + C_y y_t \\ &= \{(x^2 + y^2)(4x - 2) - 4x^2\}(-r \sin t) + 2y(2x^2 + 2y^2 - 2x - 1)r \cos t \\ &= -r \sin t \{r^2(4r \cos t - 2) - 4r^2 \cos^2 t\} + 2r^2 \sin t \cos t(2r^2 - 2r \cos t - 1) \\ &= -4r^4 \sin t \cos t + 2r^3 \sin t + 4r^3 \sin t \cos^2 t \\ &\quad + 4r^4 \sin t \cos t - 4r^3 \sin t \cos^2 t - 2r^2 \sin t \cos t \\ &= 2r^3 \sin t - 2r^2 \sin t \cos t \end{aligned}$$

となります。

【解答例 その 2】 C を r, t の関数と考えたものと同じ記号 C で表すことにすれば、

$$C(r, t) = r^2(r^2 - 2r \cos t) - r^2 \sin^2 t = r^4 - 2r^3 \cos t - r^2 \sin^2 t$$

ですから、

$$C_r = 4r^3 - 6r^2 \cos t - 2r \sin^2 t$$

$$C_t = 2r^3 \sin t - 2r^2 \sin t \cos t$$

となります。

□

問題 5 関数 $w(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ に対して $w_{xx} + w_{yy} = 0$ を示して下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：オ

【解答例】

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{1(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ w_y &= \frac{-x(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ w_{xx} &= \frac{(-2x)(x^2 + y^2)^2 - (y^2 - x^2)2(x^2 + y^2)2x}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{(-2x)(x^2 + y^2) - (y^2 - x^2)4x}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3} \\ w_{yy} &= \frac{(-2x)(x^2 + y^2)^2 - (-2xy)2(x^2 + y^2)2y}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{(-2x)(x^2 + y^2) - (-2xy)4y}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{6xy^2 - 2x^3}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

以上から題意は明らか。

□

問題 6 関数 $f(x) = \sin x$ の、原点での Taylor 展開を求めて下さい。ただし、展開の可能性は既知とします。

一般項はなくても構いませんが、少なくとも最初の 0 でない 3 項は具体的に書いて下さい（その後は『+...』で結構です）。

配点：10 点 シラバス達成度目標：イ

【解答例】

$$\begin{array}{lll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 & \frac{1}{0!}f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 & \frac{1}{1!}f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 & \frac{1}{2!}f''(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -1 & \frac{1}{3!}f^{(3)}(0) = -\frac{1}{3!} \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 & \frac{1}{4!}f^{(4)}(0) = 0 \end{array}$$

となっていて以降は周期的に繰り返すだけなので、求める展開式は

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

となります。

□

問題 7 関数 $p(x) = \tan^{-1}x$ に対して 3 次の項までの和を近似値とし、誤差項が 4 次の Taylor の定理を原点のまわりで適用し、 $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ の近似値とその誤差の限界を求めて下さい。

配点：5 点 シラバス達成度目標：ウ

【解答例】

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \tan^{-1}x & p(0) &= 0 \\
 p'(x) &= \frac{1}{x^2+1} & p'(0) &= 1 \\
 p''(x) &= \frac{-2x}{(x^2+1)^2} & p''(0) &= 0 \\
 p^{(3)}(x) &= \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\
 &= \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} \\
 &= \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} & p^{(3)}(0) &= -2 \\
 p^{(4)}(x) &= \frac{12x(x^2+1)^3 - (6x^2-2) \cdot 3(x^2+1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^6} \\
 &= \frac{12x(x^2+1) - 6x(6x^2-2)}{(x^2+1)^4} \\
 &= \frac{-24x^3+24x}{(x^2+1)^4}
 \end{aligned}$$

ですから、Taylor の定理によれば、任意の $b \neq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
 p(b) &= p(0) + p'(0)b + \frac{p''(0)}{2!}b^2 + \frac{p^{(3)}(0)}{3!}b^3 + \frac{p^{(4)}(c)}{4!}b^4 \\
 &= b - \frac{1}{3}b^3 + \frac{-c^3+c}{(c^2+1)^4}b^4
 \end{aligned}$$

となるような c が 0 と b の間に存在します。

従って特に $b = \frac{1}{2}$ の時に、 $0 < c < \frac{1}{2}$ なる実数 c で

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{-c^3+c}{(c^2+1)^4} \frac{1}{16}$$

を満たすものが存在します。

右辺の第 2 項までの和を近似値とし、第 3 項を誤差とすれば、

$$(\text{近似値}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24} \sim 0.458333$$

であり、関数 $y = x - x^3$ が区間 $[0, \frac{1}{2}]$ で単調増加であることに注意すれば

$$|(\text{誤差})| = \frac{|c-c^3|}{16(c^2+1)^4} < \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{16} = \frac{3}{128} < 0.023438$$

と評価されます。

あるいは、単に $|c-c^3| < c < \frac{1}{2}$ と評価して

$$|(\text{誤差})| = \frac{|c-c^3|}{16(c^2+1)^4} < \frac{\frac{1}{2}}{16} = \frac{1}{32} = 0.03125$$

と云う評価でも良いでしょう。

□

問題 8 次のべき級数の収束半径を求めて下さい：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n.$$

配点：10 点	シラバス達成度目標：ア
---------	-------------

【解答例】 x^n の係数を a_n と置けば、

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}} = \frac{n2^{n+1}}{(n+1)2^n} = \frac{2n}{n+1} \rightarrow 2 \quad (\text{as } n \rightarrow \infty)$$

ですから、収束半径は 2 です。 □