1 次の級数の積を形式的に展開して、次数の低い方から 5 次の項まで求めてください：

$$\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\right)$$

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】

$$\begin{aligned}&\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\right)\\ &=x+\left(-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+\left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{5!}\right)x^5+\cdots\\ &=x-\frac{4}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+\cdots\\ &=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\end{aligned}$$

□

2 等比級数の和の公式を使って、次の関数を指定された点の周りでべき級数展開してください：

(1) $\dfrac{1}{10-x}$, $x=8$ のまわりで (2) $\dfrac{1}{2x-x^2}$, $x=1$ のまわりで

配点：(1)10 点、(2)5 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】 (1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{10-x}&=\frac{1}{10-(x-8)-8}\\ &=\frac{1}{2-(x-8)}\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-8}{2}}\end{aligned}$$

ですから、$|x-8|<2$ すなわち $6<x<10$ の範囲で

$$\frac{1}{10-x}=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{x-8}{2}+\left(\frac{x-8}{2}\right)^2+\cdots\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}(x-8)+\frac{1}{2^3}(x-8)^2+\cdots$$

と展開されます。

(2)

$$\frac{1}{2x-x^2}=\frac{1}{1-(x-1)^2}=1+(x-1)^2+(x-1)^4+\cdots$$

□

3 ダランベールの判定法を使って次の正項級数が収束するかどうか判定してください：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

配点：(1)10 点、(2)10 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1)

$$\frac{\frac{1}{3^{n+1}(n+1)}}{\frac{1}{3^n n}}=\frac{3^n n}{3^{n+1}(n+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\to\frac{1}{3}\quad(n\to\infty)$$

ですからこの正項級数は収束します。

(2)

$$\frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}}=\frac{(n+1)!10^n}{n!10^{n+1}}=\frac{n+1}{10}\to+\infty$$

ですからこの正項級数は $+\infty$ に発散します。 □

4 次のべき級数の収束半径を求めてください：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^3}(x-1)^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n x^n$

配点：(1)10 点、(2)10 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1)

$$\left|\frac{\frac{3}{n^3}}{\frac{3}{(n+1)^3}}\right|=\left|\frac{n+1}{n}\right|^3=\left|1+\frac{1}{n}\right|^3\to1\quad(n\to\infty)$$

ですから、収束半径は 1 です。

(2)

$$\left|\frac{(-3)^n}{(-3)^{n+1}}\right|=\frac{1}{3}\to\frac{1}{3}\quad(n\to\infty)$$

ですから収束半径は $\frac{1}{3}$ です。 □

5 次の関数を指定された点の周りでテイラー展開してください：

(1) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}, \quad x = 0$

(2) $g(x) = \log(1+x), \quad x = 1$

ただし、展開可能であることは既知とし、展開式は以下の書式に従ってください（一般項は必要ありません）。

$$h(x) = h(a) + h'(a)(x-a) + \frac{h''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{h^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

配点：(1)10 点、(2)10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】 (1)

$$f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$$
$$f''(x) = 2^2\mathrm{e}^{2x}$$
$$f'''(x) = 2^3\mathrm{e}^{2x}$$

ですから、展開式は

$$\mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \cdots$$

となります。

(2)

$$g'(x) = (1+x)^{-1}$$
$$g''(x) = -(1+x)^{-2}$$
$$g'''(x) = 2(1+x)^{-3}$$

ですから展開式は

$$\log(1+x) = \log 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3 + \cdots$$

です。 □

6 2 次の項までを近似値とし、誤差項が 3 次のテイラーの定理を利用して、$\sqrt{5}$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めてください。ただし、近似値と誤差の限界は、それぞれ正確な値を分数で表したものと、割り算を実行して小数点以下 5 桁まで求めたものの両方を書いてください。

配点：15 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】 $f(x) = \sqrt{x}$ と置けば、

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

ですから、$a = 4, b = 5$ に対して $n = 2$ の場合のテイラーの定理を適用すれば、

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(c)(b-a)^3 \\ \sqrt{5} &= 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}c^{-\frac{5}{2}} \\ &= 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{c^5}} \end{aligned}$$

となるような c が $4 < c < 5$ の範囲に存在します。

右辺第３項までの和を近似値とし、残りを誤差とすれば、$4 < c$ に注意して

$$(\text{近似値}) = \frac{128 + 16 - 1}{64} = \frac{143}{64} = 2.234375 \approx 2.23437$$

（最後の桁は四捨五入して 8 でも良い）

$$\left|(\text{誤差})\right| = \frac{1}{16\sqrt{c^5}} < \frac{1}{16\cdot 2^5} = \frac{1}{512} = 0.001953125 \approx 0.00195$$

が得られます。 □