

1 次の極限值が存在するかどうか調べ、存在する場合はその値を求めてください：

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x + 2y} \quad (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y + y^5}{x^2 + 3y^4}$$

配点：(1)5 点、(2)8 点、(3)2 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と置けば、原点以外において

$$0 \leq \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| = r |\sin \theta|^3 \leq r$$

であり、 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $r \rightarrow 0$ ですから、はさみうちの原理により問題の極限值は存在して 0 です。

(2) x 軸上（原点は除く）での関数の値は 0 ですから、 x 軸に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ とした場合の極限值は 0 です。

しかし、 y 軸上（原点は除く）での関数値は $\frac{1}{2}$ で一定値ですから、 y 軸に沿った極限は $\frac{1}{2}$ になります。

このように、近づけかたによって極限值が異なっているので、問題の極限值は存在しません。

(3) 原点以外において

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y + y^5}{x^2 + 3y^4} \right| = |y| \left| \frac{x^2 + y^4}{x^2 + 3y^4} \right| \leq |y|$$

が成り立っています。

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $|y| \rightarrow 0$ ですから、はさみうちの原理により、問題の極限值は存在して 0 です。

□

2 次の関数の偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求めてください：

$$(1) f(x, y) = (x^2 - 2y)^{23} \quad (2) f(x, y) = \log(xy^3)$$

$$(3) f(x, y) = (\sin x)(\tan y) \quad (4) f(x, y) = 2^{x+2y}$$

配点：(1)9 点、(3)6 点、(2)5 点、(4)3 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1)

$$f_x = 46x(x^2 - 2y)^{22}, \quad f_y = -46(x^2 - 2y)^{22}.$$

(2) $f(x, y) = \log x + 3 \log y$ ですから、

$$f_x = \frac{1}{x}, \quad f_y = \frac{3}{y}.$$

(3)

$$f_x = (\cos x)(\tan y), \quad f_y = \frac{\sin x}{\cos^2 y}.$$

(4) $f(x, y) = e^{(\log 2)(x+2y)}$ ですから、

$$f_x = \log 2 e^{(\log 2)(x+2y)} = (\log 2)2^{x+2y}, \quad f_y = (2 \log 2)e^{(\log 2)(x+2y)} = (2 \log 2)2^{x+2y}.$$

□

3 次の関数の、2 次までの偏導関数を全て求めてください：

$$(1) f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 5x - 2y \quad (2) f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

$$(3) f(x, y) = e^{-2x} \cos 5y$$

配点：各 6 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1)

$$f_x = 2x + y + 5, \quad f_y = x + 2y - 2$$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 1, \quad f_{yy} = 2.$$

(2)

$$f_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x \left\{ -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \right\} 2y = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(3)

$$f_x = -2e^{-2x} \cos 5y$$

$$f_y = -5e^{-2x} \sin 5y$$

$$f_{xx} = 4e^{-2x} \cos 5y$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 10e^{-2x} \sin 5y$$

$$f_{yy} = -25e^{-2x} \cos 5y.$$

□

4 $F(x, y) = (x + y + 1)^2 - x(x - 3)^2$ のとき、方程式 $F(x, y) = 0$ の定める曲線について以下の問いに答えてください：

(1) 特異点があれば求めてください。

(2) 曲線 $F(x, y) = 0$ 上の点 $(4, -3)$ における接線の方程式を求めてください。

配点：(1)6 点、(2)5 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1) 偏導関数は

$$F_x = 2(x + y + 1) - (x - 3)^2 - 2x(x - 3), \quad f_y = 2(x + y + 1)$$

ですから特異点は連立方程式：

$$\begin{cases} (x + y + 1)^2 - x(x - 3)^2 = 0 \\ 2(x + y + 1) - (x - 3)^2 - 2x(x - 3) = 0 \\ 2(x + y + 1) = 0 \end{cases}$$

の解を求めればよく、第 3 式を第 1 式に代入して $x = 0, 3$ が得られますが、このうち第 2 式を満たすのは $x = 3$ のみであり、従って特異点は $(3, -4)$ のみです。

(2)

$$F_x(4, -3)(x - 4) + F_y(4, -3)(y + 3) = 0$$

$$-5(x - 4) + 4(y + 3) = 0$$

$$5x - 4y = 32$$

□

5 次の場合に以下の問いに答えてください：

$$z = \frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \frac{13}{4}y^2, \quad x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}v - w), \quad y = \frac{1}{2}(v + \sqrt{3}w)$$

(1) z の v, w についての偏導関数 z_v, z_w を求めてください。

(2) z の v, w についての 2 次の偏導関数 $z_{vv}, z_{vw}(=z_{wv}), z_{ww}$ を求めてください。

配点：(1)8 点、(2)2 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1)

$$\begin{aligned} z_v &= z_x x_v + z_y y_v \\ &= \left(\frac{7}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}y \right) \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{13}{2}y \right) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}(7\sqrt{3} - 3\sqrt{3})x + \frac{1}{4}(13 - 9)y \\ &= \sqrt{3}x + y \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}v - w) + \frac{1}{2}(v + \sqrt{3}w) \\ &= 2v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_w &= z_x x_w + z_y y_w \\ &= \left(\frac{7}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}y \right) \frac{-1}{2} + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{13}{2}y \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{4}(-7 - 9)x + \frac{1}{4}(3\sqrt{3} + 13\sqrt{3})y \\ &= -4x + 4\sqrt{3}y \\ &= -2(\sqrt{3}v - w) + 2\sqrt{3}(v + \sqrt{3}w) \\ &= 8w \end{aligned}$$

(2)

$$z_{vv} = 2, \quad z_{vw} = z_{wv} = 0, \quad z_{ww} = 8.$$

□

6 (1) e^x の、 $x = 0$ の周りでの Taylor 展開を求めてください。ただし、展開が可能であることは既知とします。

(2) (1) で求めた展開式の 4 次の項までの和を近似値として e の近似値を求めてください。ただし、近似値は小数第 4 位を四捨五入して小数第 3 位まで求め、誤差は評価する必要はありません。

配点：(1)6 点、(2)5 点 シラバス到達目標：イ

【解答例】 (1) 任意の n に対して、

$$(e^x)^{(n)} \Big|_0 = 1$$

ですから、展開式は以下の通りです：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots .$$

(2)

$$(\text{近似値}) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2 + \frac{12 + 4 + 1}{24} = 2 + \frac{17}{24} \approx 2.708$$

□

7 次の正項級数が収束するかどうか判定してください。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{50}}{50^n} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{50^n}$$

配点：各 6 点 シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1)

$$\frac{\frac{(n+1)^{50}}{50^{n+1}}}{\frac{n^{50}}{50^n}} = \frac{(n+1)^{50}50^n}{n^{50}50^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{50} \frac{1}{50} \rightarrow \frac{1}{50} < 1 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

ですから、ダランベールの判定法により、この正項級数は収束します。

(2)

$$\frac{\frac{(n+1)!}{50^{n+1}}}{\frac{n!}{50^n}} = \frac{(n+1)!50^n}{n!50^{n+1}} = \frac{n+1}{50} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

ですから、ダランベールの判定法により、この正項級数は $+\infty$ に発散します。

□