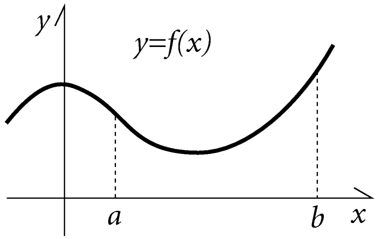
１． １変数実数値関数に関する平均値の定理（発見者にちなんで『Lagrange の平均値の定理』とも言う）とはどんな定理ですか。定理の前提条件が

関数 $f(x)$ は $[a, b]$ で連続であり、かつ (a, b) で微分可能である

であった場合に定理はどんな事が成り立つと言っているのか答えて下さい。
その際、下図と同じ様な図を答案用紙に描き、定理の図形的な意味合いも含めて説明して下さい。



配点：10 点	シラバス達成度目標：ア

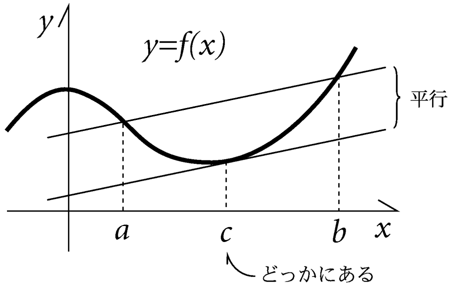
解答例

題意の前提条件の下で、定理は

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

となる様な c が a と b の間に存在する事を主張します。

この左辺のグラフにおける図形的な意味は、グラフ上の２点 $(a, f(a))$、$(b, f(b))$ を結ぶ直線の傾きであり、それが右辺の様にある点 $(c, f(c))$ に於けるグラフの接線の傾きと等しくなる事を意味しています。



２． 関数 $\sin x$ に対して $n=2$ の時の Taylor の定理を $x=\frac{\pi}{2}$ の近くで適用し、$\sin 93°$ の値について近似値と誤差の限界をそれぞれ小数点以下５桁まで求めて下さい（６桁以下は切り捨て)。

参考値：$\left(\frac{\pi}{60}\right)^2 = 0.0027415, \quad \left(\frac{\pi}{60}\right)^3 = 0.0001435$

配点：15 点	シラバス達成度目標：キ

解答例

$n=2$ の時の Taylor の定理には３階微分まで出て来るのでまず $f(x)=\sin x$ としてそこまでの計算をやっておく。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f(\frac{\pi}{2}) &= 1 \\ f'(x) &= \cos x & f'(\frac{\pi}{2}) &= 0 \\ f^{(2)}(x) &= -\sin x & f^{(2)}(\frac{\pi}{2}) &= -1 \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(c) &= -\cos c \end{aligned}$$

$n=2$ の時の $x=\frac{\pi}{2}$ の周りでの Taylor の定理によれば、

$$f(b) = f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2})(b-\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(\frac{\pi}{2})(b-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c)(b-\frac{\pi}{2})^3$$

となる様な c が b と $\frac{\pi}{2}$ の間に存在します。

ここにさっき計算した結果を代入すると、

$$f(b) = 1 - \frac{1}{2!}(b-\frac{\pi}{2})^2 - \frac{1}{3!}\cos c(b-\frac{\pi}{2})^3$$

であり、$b = 93° = \frac{93\pi}{180}$ とすると、

$$\sin 93° = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{60}\right)^2 - \frac{1}{6}\cos c\left(\frac{\pi}{60}\right)^3$$

となり、近似値は

$$(\text{近似値}) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{60}\right)^2 = 0.99862$$

となり、また、

$$\left|-\frac{1}{6}\cos c\left(\frac{\pi}{60}\right)^3\right| \leq \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{60}\right)^3$$

から誤差の限界は

$$(\text{誤差の限界}) = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{60}\right)^3 = 0.00002$$

となる事が解ります。

３．　関数 $\log(1+\mathrm{e}^x)$ の Maclaurin 展開（すなわち、$x=0$ の周りでの Taylor 展開）を x^3 の項まで求めて下さい。

配点：10 点	シラバス達成度目標：キ

解答例

まずは必要となる微分計算をやっておく。$g(x)=\log(1+\mathrm{e}^x)$ とする。

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \log(1+\mathrm{e}^x) & g(0) &= \log 2 \\
g'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} & g'(0) &= \frac{1}{2} \\
g^{(2)}(x) &= \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} & g^{(2)}(0) &= \frac{1}{4} \\
g^{(3)}(x) &= \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)^2-\mathrm{e}^x 2(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^4} & g^{(3)}(0) &= 0
\end{aligned}
$$

以上によれば求める展開式は

$$\log 2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2$$

となる。

４．　次の極限値が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

（１） $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3y}{x+y}$

（２） $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2\cos\frac{1}{x^3+y^3}$

配点：各 10 点	シラバス達成度目標：ア

解答例

（１）直線 $y=mx$ 上でこの関数を考えると、

$$\frac{3y}{x+y}=\frac{3mx}{x+mx}=\frac{3m}{1+m}$$

となっており、この直線上では定数関数である。従ってこの直線に沿って $(x,y)\to(0,0)$ の極限を考える限りは極限値は $\frac{3m}{1+m}$ であり、これは直線の傾き m によって異なる。

　これは近づけ方によって極限値が異なる事を意味しており、従って題意の極限値は存在しない。

（２）関数の値の絶対値を見ると、

$$\left|x^2\cos\frac{1}{x^3+y^3}\right|\leq x^2\to 0\quad(\ \text{as}\ (x,y)\to(0,0)\ )$$

となっているので、求める極限値は 0 である。

５．次の関数の偏導関数を求めて下さい。

（１）$f(x,y) = \log(\cos x + \sin y)$

（２）$g(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$

配点：各 10 点	シラバス達成度目標：イ

解答例

（１）

$$f_x(x,y) = \frac{-\sin x}{\cos x + \sin x}$$
$$f_y(x,y) = \frac{\cos y}{\cos x + \sin x}$$

（２）

$$g_x(x,y) = y\mathrm{e}^{xy}$$
$$g_y(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$$

６．関数 $p(x,y) = \log(x^2+y^2)$ に対して、$\dfrac{\partial^2 p(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 p(x,y)}{\partial y^2}$ を求めて下さい。

配点：15 点	シラバス達成度目標：イ

解答例

まず２階微分まで計算すると、

$$p_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$
$$p_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\begin{aligned} p_{xx}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ p_{yy}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

なので、

$$p_{xx}(x,y) + p_{yy}(x,y) = 0$$

となる。

７． 次の各関数：

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ g(t,u) = \mathrm{e}^t \cos u \\ h(t,u) = \mathrm{e}^t \sin u \end{cases}$$

に対して、合成関数 $k(t,u) = f(g(t,u), h(t,u))$ の偏導関数を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス達成度目標：ウ

解答例

$$k(t,u) = f(g(t,u), h(t,u)) = \mathrm{e}^{2t} \cos^2 u + \mathrm{e}^{2t} \sin^2 u = \mathrm{e}^{2t}$$

なので、

$$k_t(t,u) = 2\mathrm{e}^{2t}, \qquad k_u(t,u) = 0$$

である。