

1. Lagrange の乗数法とは次の様な定理でした:

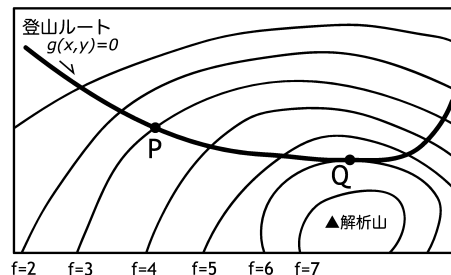
Lagrange の乗数法

- 前提条件: (1) 関数 $f(x, y)$ および $g(x, y)$ は偏微分可能であり、各偏導関数は連続であるとする。
 (2) 関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) において条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの極値をとるものとする。
 (3) $\text{grad}g(a, b) \neq \mathbf{0}$

主張内容: $\text{grad}f(a, b) = k \text{grad}g(a, b)$ を満たす様な実数 k が存在する。

この定理が主張している内容を、関数 $f(x, y)$ の等高線(曲線 $f(x, y) = n$ を各 n について書いたもの)を山の地形図に、条件 $g(x, y) = 0$ を満たす点の集まり(曲線)を登山ルートに、 f の値をルート上の標高に例えた大雑把な説明をしようと思います。

下図のルート上の2点P、Qについてその状況の違いを、Lagrange の乗数法の前提条件(2)および主張内容と絡めて説明して下さい。



尚、一般に $\text{grad}h(x, y)$ は曲線 $h(x, y) = 0$ あるいは曲線 $h(x, y) = n$ の法線ベクトルとなっている事は既知として良い。

配点: 10点	シラバス達成度目標: ア、カ
---------	----------------

解答例

点Pでは上り坂の途中であり、標高すなわち f はここで極値ではないが、等高線とルートは接しておらず交わっているのでそれぞれの法線ベクトル同士も平行ではない。

一方点Qではこのルート上の最高到達点となっており、 f は極値であるが、Lagrange の乗数法が云う通り、等高線とルートは接しており、互いの法線ベクトルは平行である(定数倍の関係にある)。

2. 条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとでの関数 $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ の最大値と最小値を求めて下さい。

その際、

事実 Q: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ を満たす点の集合は (端点のない) 有界閉集合であり、従って連続関数 $f(x, y)$ はこの集合上で最大値と最小値を達成し、かつそれらは同時に極値でもある。

は知られている事実であるとして証明抜きで引用して良いが、この事実を利用する際は『問題文中の事実 Q によれば...』などと但し書きを必ず挿入する事。

配点: 20点	シラバス達成度目標: カ
---------	--------------

解答例

まず条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の極値の候補点を Lagrange の乗数法によって探す事にする。

点 (a, b) において上に述べた様な極値であると仮定する。 g のグラジエントは

$$\text{grad}g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

なので、これがゼロベクトルになるのは原点のみであるが、原点は条件 $g(x, y) = 0$ を満たさないため、先の極値点 (a, b) は原点ではなく、従ってこの点に於いて g のグラジエントはゼロベクトルではない事が分かる。

したがって、Lagrange の乗数法により、 $\text{grad}f(a, b) = k \text{grad}g(a, b)$ となる様な実数 k が存在する。

この式を連立方程式として書けば

$$\begin{cases} 2a + 2b = 2ka \\ 2a + 2b = 2kb \end{cases}$$

なので、この第1式から第2式を辺々引いて、 $k(a - b) = 0$ が得られる。

$k = 0$ の場合: このとき第1式と第2式は同じ式であり、 $b = -a$ であるのでこれを点 (a, b) が満たしていた条件 $g(x, y) = 0$ の式に代入すれば、

$$2a^2 = 1$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{したがって複号同順で } b = \mp \frac{1}{\sqrt{2}})$$

が得られる。

$k \neq 0$ の場合: $a - b = 0$ なので、これを同様に条件式に代入すると

$$2a^2 = 1$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{したがって複号同順で } b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$$

が得られる。

以上から $g(x, y) = 0$ のもとでの $f(x, y)$ の極値の候補点は $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ の4点 (複号同順) であり、

それぞれに於ける f の値は

$$f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0, \quad f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2$$

である。

問題文中の事実 Q によれば, 関数 f は縁のない有開閉集合 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ 上で必ず最大値と最小値を達成し、それらはまた同時に極値でもあるから、上の結果を見れば最大値・最小値は次の通りとなる：

最大値：点 $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ に於ける 2、 最小値：点 $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}})$ に於ける 0

3. 関数 $w(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ の極値を求めて下さい。

配点：20点 | シラバス達成度目標：オ

解答例

まずはじめに必要なとなる偏導関数を求めておく。

$$w_x = 3x^2 - 3y$$

$$w_y = 3y^2 - 3x$$

$$w_{xx} = 6x$$

$$w_{xy} = -3$$

$$w_{yy} = 6y$$

$$\text{grad} w = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}$$

まず、 $\text{grad} w = \mathbf{0}$ となる点を求める。これは連立方程式：

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

を解けば良いが、第1式から $y = x^2$ なのでこれを第2式に代入すれば

$$\begin{aligned} x^4 - x &= 0 \\ x(x^3 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

となって、 $x = 0$ または $x = 1$ である事が分かる。

$x = 0$ の場合：明らかに $y = 0$ である。

$x = 1$ の場合：第1式から明らかに $y = 1$ が得られる。

以上から極値の候補点は $(0, 0)$, $(1, 1)$ の2点である。

w の Hessian を

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{yx} & w_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$$

と置けば、上の2点に於いては

$$H(0, 0) = -9 < 0, \quad H(1, 1) = 6^2 - 3^2 > 0$$

であるから、 $w_{xx}(1, 1) = 6$ である事と合わせて判断すれば w の極値は

極小値：点 $(1, 1)$ に於ける -1

が全てである。

4. 関数 e^{x^2-x} の Maclaurin 展開 (すなわち、 $x = 0$ の周りでの Taylor 展開) を x^3 の項まで求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：キ

解答例

まず $r(x) = e^{x^2-x}$ として必要となる微分計算をしておく。

$$\begin{aligned} r(x) &= e^{x^2-x} & r(0) &= 1 \\ r'(x) &= (2x-1)e^{x^2-x} & r'(0) &= -1 \\ r''(x) &= \{2 + (2x-1)^2\}e^{x^2-x} & r''(0) &= 3 \\ r^{(3)}(x) &= \{2(2x-1) \cdot 2 + 2(2x-1) + (2x-1)^3\}e^{x^2-x} & r^{(3)}(0) &= -7 \end{aligned}$$

以上により、求める Maclaurin 展開の始めの項は

$$r(0) + r'(0)x + \frac{1}{2!}r''(0)x^2 + \frac{1}{3!}r^{(3)}(0)x^3 = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3$$

となる。

5. 極限值 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

配点：15 点 シラバス達成度目標：ア

解答例

この関数は分子・分母共に 0 に収束しており、かつ、次数を見ると分子・分母共に 2 次となっているため、極限が存在しないのではないかと云う考えのもとで、直線 $y = mx$ 上で様子を見てみると、この直線上 (原点は除く) では

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

となっており、一定値である。従ってこの直線に沿って点 (x, y) を点 $(0, 0)$ に近づけた時の極限値は $\frac{m}{1+m^2}$ であり、これは近づけ方によって極限値が異なる事を意味する。従って題意の極限は存在しない。

6. 関数 $p(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ に対して、2次の偏導関数を全て求めて下さい。

配点：15点 | シラバス達成度目標：イ、ウ

解答例 1階の偏導関数は

$$\begin{aligned} p_x(x, y) &= \frac{1 \cdot (x-y) - (x+y) \cdot 1}{(x-y)^2} \\ &= \frac{-2y}{(x-y)^2} \\ p_y(x, y) &= \frac{1 \cdot (x-y) - (x+y) \cdot (-1)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2x}{(x-y)^2} \end{aligned}$$

となっているので、2階の偏導関数は

$$\begin{aligned} p_{xx}(x, y) &= \frac{0 - (-2y)2(x-y)}{(x-y)^4} \\ &= \frac{4y}{(x-y)^3} \\ p_{xy}(x, y) &= \frac{-2(x-y)^2 - (-2y)2(x-y)(-1)}{(x-y)^4} \\ &= \frac{-2(x-y) - 4y}{(x-y)^3} \\ &= \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3} \\ p_{yy}(x, y) &= \frac{0 - 2x2(x-y)(-1)}{(x-y)^4} \\ &= \frac{4x}{(x-y)^3} \end{aligned}$$

となる。

7. 関係式 $x^3y^3 + y - x = 0$ で定まる陰関数 $y(x)$ について、 $y'(x)$ を x, y で表して下さい。

配点：10点 | シラバス達成度目標：エ

解答例

関係式の両辺を x で微分すれば、

$$\begin{aligned} 3x^2y^3 + x^3 \cdot 3y^2y' + y' - 1 &= 0 \\ (3x^3y^2 + 1)y' &= 1 - 3x^2y^3 \\ y' &= \frac{1 - 3x^2y^3}{1 + 3x^3y^2} \end{aligned}$$

である事が分かる。