

1. 次の文章は2変数関数の偏微分可能性を定義した文章です。

2変数関数 $f(x, y)$ が、点 $(x, y) = (a, b)$ の近くで定義されていて、次の極限值：

あ

が存在して有限値である時、関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) において、変数 x に関して偏微分可能であると云う。

文中の あ のところにはどんな極限值が入るでしょうか。

配点：10点 | シラバス達成度目標：ア

解答例

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

あるいは、

$$\lim_{c \rightarrow a} \frac{f(c, b) - f(a, b)}{c - a}$$

など。

2. 次の極限值が存在するかどうか調べ、存在するならその値を求めて下さい。

$$(1) \lim_{(x, y) \rightarrow (3, 2)} \frac{3y - 2x}{x^3 + y - 1}$$

$$(2) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$(3) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(4) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + 5y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

配点：(1)～(3) 10点、(4) 8点 | シラバス達成度目標：ア

解答例

(1) この関数において $(x, y) = (3, 2)$ とすると普通に代入出来て、値は0となっている。これはこの関数がこの点に於いて普通に定義されて居ることを意味し、分数関数は定義されている点に於いては連続関数であるから求める極限値は0である。

(2) この極限は $\frac{0}{0}$ の不定形であり、この分数関数の分子分母の次数を比較するといずれも2次で釣り合っているため、求める極限值は存在しない可能性が高いと考える。

そこで、まず x -軸上での関数の値を調べると、

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

となっていて、 x -軸上ではこの関数は常に一定値1であるから、 x -軸に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ とした時の極限值も矢張り1である。

一方 y -軸上では

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

となっていて、常に一定値-1であるから、 y -軸に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ とした時の極限值は-1である。

この様に近づけ方によって極限值が異なる値になっているので、題意の極限值は存在しない。

(3) この極限は $\frac{0}{0}$ の不定形であり、この分数関数の分子・分母の次数を比較すると分子の方が次数が高いため求める極限值は存在して0である可能性が高いと考える。

そこで $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ として極座標で考えることにする。

この様に置くと問題の関数は

$$\left| \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta}{r} \right| = r |\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta| \leq 3r$$

と評価されるため、

$$-3r \leq \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 3r$$

であって、 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $r \rightarrow 0$ である事により、題意の極限值も0である事が分かる。

(4) x -軸の正の部分上でこの関数は

$$\frac{x^2 + 5y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \frac{x^2}{|x|} = x$$

であるから、 x -軸に沿って x -軸の正の部分から $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ とした時の極限値は0であるが、 y -軸の正の部分上では

$$\frac{x^2 + 5y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{5y}{\sqrt{y^2}} = \frac{5y}{|y|} = 5$$

となっているので、 y -軸に沿って y -軸の正の部分から $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ とした場合の極限値は5である。

以上により近づけ方によって極限值が異なっているため求める極限值は存在しない。

3. 次の関数の偏導関数を求めて下さい。

$$(1) g(x, y) = 3x^3y + 2xy^2 - y^4$$

$$(2) h(x, y) = \cos(2x + y^2)$$

$$(3) k(x, y) = e^{3x^2-y}$$

配点：各10点 | シラバス達成度目標：イ

解答例

(1)

$$g_x(x, y) = 9x^2y + 2y^2$$

$$g_y(x, y) = 3x^3 + 4xy - 4y^3$$

(2)

$$\begin{aligned} h_x(x, y) &= -\sin(2x + y^2) \cdot 2 \\ &= -2\sin(2x + y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_y(x, y) &= -\sin(2x + y^2) \cdot 2y \\ &= -2y\sin(2x + y^2) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} k_x(x, y) &= e^{3x^2-y} 6x \\ &= 6xe^{3x^2-y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_y(x, y) &= e^{3x^2-y} (-1) \\ &= -e^{3x^2-y} \end{aligned}$$

4. 関数 $p(x, y) = (x^2 + y)^3$ の2次の偏導関数を全て求めて下さい。

配点：12点 | シラバス達成度目標：イ

解答例

$$\begin{aligned} p_x(x, y) &= 3(x^2 + y)^2 2x \\ &= 6x(x^2 + y)^2 \end{aligned}$$

$$p_y(x, y) = 3(x^2 + y)^2$$

$$\begin{aligned} p_{xx}(x, y) &= 6(x^2 + y)^2 + 6x \cdot 2(x^2 + y)2x \\ &= 6(x^2 + y)(x^2 + y + 4x^2) \\ &= 6(x^2 + y)(5x^2 + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{xy}(x, y) &= 6x \cdot 2(x^2 + y) \\ &= 12x(x^2 + y) \end{aligned}$$

$$p_{yx}(x, y) = 12x(x^2 + y)$$

$$p_{yy}(x, y) = 6(x^2 + y)$$

5. 次の各関数：

$$\begin{cases} f(x, y) = xy \\ g(t, u) = \log \sqrt{t^2 + u^2} \\ h(t, u) = 2t + u^2 \end{cases}$$

に対して、合成関数 $k(t, u) = f(g(t, u), h(t, u))$ の偏導関数を求めて下さい。

配点：10点	シラバス達成度目標：ウ
--------	-------------

解答例

$$\begin{aligned} k_t(t, u) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(t, u), h(t, u)) \frac{\partial g}{\partial t}(t, u) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t, u), h(t, u)) \frac{\partial h}{\partial t}(t, u) \\ &= (2t + u^2) \frac{1}{2} \frac{1}{t^2 + u^2} 2t + \log \sqrt{t^2 + u^2} \cdot 2 \\ &= \frac{t(2t + u^2)}{t^2 + u^2} + \log(t^2 + u^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_u(t, u) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(t, u), h(t, u)) \frac{\partial g}{\partial u}(t, u) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t, u), h(t, u)) \frac{\partial h}{\partial u}(t, u) \\ &= (2t + u^2) \frac{1}{2} \frac{1}{t^2 + u^2} 2u + \log \sqrt{t^2 + u^2} \cdot 2u \\ &= \frac{u(2t + u^2)}{t^2 + u^2} + u \log(t^2 + u^2) \end{aligned}$$