

1. 関数 $f(x, y) = 4x^3 - y^3 + 3x^2y + 9y$ について以下の問に答えて下さい。

(1) ヘシアンを使って極値を求めようとする場合、作業の全体は大雑把に言って3つの部分に分けられます。その3つの作業とはそれぞれ何であるか、文章で簡潔に答えて下さい(ただし、ヘシアンが0になる様な場合は考えなくて結構です)。

(2) 上で答えた3つの作業を実行してこの関数の極値を全て求めて下さい。

配点:(1) 10点、(2) 30点 シラバス達成度目標:イ、オ

解答例

(1) 3つの作業は以下の通り:

- まず必要となる2階までの偏導関数を求める。
- 次に $\text{grad}f(x, y) = \vec{0}$ となる様な点を全て求める。
- 最後に今求めた各点についてヘシアンによる判定を行う。

(2) まず必要となる2階までの偏導関数を求めると、

$$\begin{aligned} f_x &= 12x^2 + 6xy, & f_y &= -3y^2 + 3x^2 + 9 \\ f_{xx} &= 24x + 6y, & f_{xy} &= f_{yx} = 6x, & f_{yy} &= -6y \end{aligned}$$

となっている。

次に $\text{grad}f(x, y) = \vec{0}$ となる様な点を全て求めるが、それには連立方程式:

$$\begin{cases} 12x^2 + 6xy = 0 \\ -3y^2 + 3x^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

を解けば良い。

第1式は因数分解すると $6x(2x + y) = 0$ となるので $x = 0$ または $2x + y = 0$ である事が分かる。

$x = 0$ のとき このとき第2式から $-3y^2 + 9 = 0$ となって $y = \pm\sqrt{3}$ である。

$2x + y = 0$ のとき このとき第2式から

$$\begin{aligned} 0 &= -3(-2x)^2 + 3x^2 + 9 \\ &= -9x^2 + 9 \\ x^2 &= 1 \end{aligned}$$

となるので $x = \pm 1$ であり、このとき y はそれぞれ復号同順で ∓ 2 である。

以上により $\text{grad}f(x, y) = \vec{0}$ となる様な点は $(0, \pm\sqrt{3})$, $(\pm 1, \mp 2)$ (後者復号同順) の4点である事が分かる。

最後に今求めた4点についてヘシアンによる判定を行う。 f のヘシアンを H_f とする。

$(0, \pm\sqrt{3})$ について

$$H_f(0, \pm\sqrt{3}) = \begin{vmatrix} \pm 6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \mp 6\sqrt{3} \end{vmatrix} < 0$$

したがってこの点では極値ではない。

$(\pm 1, \mp 2)$ について

$$H_f(\pm 1, \mp 2) = \begin{vmatrix} \pm 12 & \pm 6 \\ \pm 6 & \pm 12 \end{vmatrix} > 0$$

ヘシアンが正なのでこの点は極値であり、更に f_{xx} の符号によれば、 $(x, y) = (1, -2)$ では極小値であり、 $(x, y) = (-1, 2)$ では極大値である事が分かる。

各点での関数の値も求めておくと以下の通り：

$$f(1, -2) = 4 + 8 - 6 - 18 = -12, \quad f(-1, 2) = -4 - 8 + 6 + 18 = 12.$$

答え： $(x, y) = (1, -2)$ で極小値 -12 、 $(x, y) = (-1, 2)$ で極大値 12

2. 条件 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ のもとでの関数 $h(x, y) = 3x - 7y$ の極値を、Lagrangeの定理(乗数法)を使って求めて下さい。

配点：20点 | シラバス達成度目標：イ、カ

解答例

第1の議論：Lagrangeの定理を使って極値の候補を探す作業

関数 $h(x, y)$ は点 (a, b) に於いて題意の条件の下での極値であると仮定します。 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ と置けば、条件式は $g(x, y) = 0$ と書く事が出来ます。

各関数のグラディエントを計算すると

$$\text{grad}h(x, y) = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \text{grad}g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

ですが、 $\text{grad}g(x, y) = \vec{0}$ となるのは明らかに原点のみです。一方で、点 (a, b) は題意の条件 $g(x, y) = 0$ を満たさねばならないため $a^2 + b^2 = 4$ であり、点 (a, b) は原点ではない事が分かります。

以上により $\text{grad}g(a, b) \neq \vec{0}$ である事が分かります。

従ってLagrangeの定理により、

$$\text{grad}h(a, b) = k \text{grad}g(a, b)$$

となる様な実数 k が存在する事が分かります。

この式を具体的に書けば

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}, \quad \text{すなわち、} \quad \begin{cases} 3 = 2ka \\ -7 = 2kb \end{cases}$$

ですが、これに点 (a, b) が条件を満たすと云う式を加えて：

$$\begin{cases} 3 = 2ka \\ -7 = 2kb \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases}$$

としてこれを解いて a, b を求めれば良い。

しかし明らかに k は 0 ではなく、 $a = \frac{3}{2k}, b = -\frac{7}{2k}$ なのでこれを第3式に代入して

$$\begin{aligned} \frac{9}{4k^2} + \frac{49}{4k^2} &= 4 \\ \frac{58}{16} &= k^2 \end{aligned}$$

により $k = \pm \frac{\sqrt{58}}{4}$ である事が分かります。これを戻してやれば結局

$(a, b) = \left(\pm \frac{6}{\sqrt{58}}, \mp \frac{14}{\sqrt{58}} \right)$ (復号同順) です。

以上により、極値の候補点は2点 $\left(\pm \frac{6}{\sqrt{58}}, \mp \frac{14}{\sqrt{58}} \right)$ である事が分かりました (復号同順)。

第2の議論：閉曲線上での連続関数の性質を使って候補を絞り込む作業

条件 $g(x, y) = 0$ を満たす点全体を集合と考えた時、この集合は円周であり、閉曲線 (有界閉集合) です。

そうするとその存在する最大値・最小値は極値であるが故に先程求めた候補点2点のいずれかで達成されていなければならないわけですが、この2点での $h(x, y)$ の値を調べてみると

$$h\left(\pm \frac{6}{\sqrt{58}}, \mp \frac{14}{\sqrt{58}}\right) = \pm \frac{18}{\sqrt{58}} \pm \frac{98}{\sqrt{58}} = \pm \frac{116}{\sqrt{58}} = \pm 2\sqrt{58} \quad (\text{復号同順})$$

なので、この前者が最大値であり、後者が最小値である他ありません。それらはまた同時に極値でもあったので答えは以下の通り：

$$\text{答え：} \begin{cases} \left(\frac{6}{\sqrt{58}}, -\frac{14}{\sqrt{58}} \right) & \text{において極大値 } 2\sqrt{58}, \\ \left(-\frac{6}{\sqrt{58}}, \frac{14}{\sqrt{58}} \right) & \text{において極小値 } -2\sqrt{58}. \end{cases}$$

連続関数 $h(x, y)$ は、閉曲線上で必ず最大値と最小値を持ち、かつそれらは同時に極大値、極小値である事が知られています。

3. 次の問題Aは上の問2の様なやり方ではすんなりと解く事が出来ません：

問題A. 条件 $xy - 1 = 0$ のもとでの関数 $r(x, y) = x^2 + 2y^2$ の極値を求めて下さい。

(1) 何故すんなり解く事が出来ないのかその理由を問2と比較した上で答えて下さい。

(2) では他にどんな方法でなら解く事が出来るのでしょうか？実際に計算をして極値を求める必要はありませんが、どう云ったやり方でやれば良いのか概略を文章で説明して下さい。

配点：各5点 シラバス達成度目標：ア、カ

解答例

(1) 先の問題では条件式の表す曲線は円周であったため有界閉曲線上の連続関数に関する定理を使って最大値・最小値の存在を示す事が出来たが、この問題では条件式 $xy = 1$ の表す曲線は双曲線であり、これは有界な閉曲線ではない。従って最大値・最小値が存在する保証はないから Lagrange の定理を使うことによって極値の候補点は求まってもそれが極値だと結論する事が出来ない。

(2) 条件式を y について解いてやってそれを関数 r に代入して1変数関数にしてから1変数関数の極値を求めてやれば良い。

4. 関係式 $y = 1 + xe^y$ で定まる陰関数 $y(x)$ の微分 $y'(x)$, $y''(x)$ を求めて下さい (x と y で表して下さい)。

配点：10点 シラバス達成度目標：イ、エ

解答例

関係式の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} y' &= e^y + xe^y y' \\ (1 - xe^y)y' &= e^y \\ y' &= \frac{e^y}{1 - xe^y} \\ y' &= \frac{e^y}{2 - y} \end{aligned}$$

である。また、少し戻って更にもう一度微分すれば

$$\begin{aligned} y'' &= e^y y' + e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y'' \\ (1 - xe^y)y'' &= 2e^y y' + xe^y (y')^2 \\ &= e^y y' (2 + xy') \\ &= e^y \frac{e^y}{1 - xe^y} \left(2 + x \frac{e^y}{1 - xe^y} \right) \\ y'' &= \frac{e^{2y}}{(1 - xe^y)^3} \{ 2(1 - xe^y) + xe^y \} \\ &= \frac{e^{2y}(2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^3} \\ &= \frac{e^{2y}(3 - y)}{(2 - y)^3} \end{aligned}$$

である。

5. $a(x, y) = x^2 - 3y^2$, $b(t) = \cos t$, $c(t) = 2 \sin t$ であるとき、
 $x = b(t)$ 、 $y = c(t)$ による合成関数 $k(t) = a(b(t), c(t))$ の微分 $k'(t)$ を求めて下さい。

配点：20点	シラバス達成度目標：イ、ウ
--------	---------------

解答例

合成関数の微分法則によれば、

$$\begin{aligned}k'(t) &= a_x(b(t), c(t))b'(t) + a_y(b(t), c(t))c'(t) \\&= 2x(-\sin t) - 6y2 \cos t \\&= -2 \cos t \sin t - 24 \cos t \sin t \\&= -26 \cos t \sin t \\&= -13 \sin 2t\end{aligned}$$

である。