

1. 次の逆三角関数の導関数を求めて下さい。

(1) $\text{Sin}^{-1}(2x)$

(2) $\text{Tan}^{-1}(x^2)$

配点：各 10 点 | シラバス達成度目標：ア

解答例 (1) $f(x) = \text{Sin}^{-1}(2x)$ とおけば、逆三角関数の定義から $-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$ となっています。また、

$$\sin f(x) = 2x$$

となるため、この両辺を x で微分すれば

$$\begin{aligned} f'(x) \cos f(x) &= 2 \\ f'(x) &= \frac{2}{\cos f(x)} \end{aligned}$$

ですが、

$$\begin{aligned} \cos^2 f(x) &= 1 - \sin^2 f(x) \\ &= 1 - 4x^2 \end{aligned}$$

であるうえに、最初に注意した様に $-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$ なので、 $\cos f(x) \geq 0$ であって

$$\cos f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$$

である事が分かります。これを戻してやれば

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

が得られますので

$$\{\text{Sin}^{-1}(2x)\}' = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

です。

(2) $g(x) = \text{Tan}^{-1}(x^2)$ とおけば $\tan g(x) = x^2$ なのでこの両辺を x で微分すれば

$$\begin{aligned} g'(x) \frac{1}{\cos^2 g(x)} &= 2x \\ g'(x) &= 2x \cos^2 g(x) \\ &= \frac{2x}{1 + \tan^2 g(x)} \\ &= \frac{2x}{1 + 4x^2} \end{aligned}$$

となって

$$\{\text{Tan}^{-1}(x^2)\}' = \frac{2x}{1 + 4x^2}$$

を得ます。

D 計算ミス、途中までしか出来なかったものなど 5 点
E ちょっとしたミス - 3 点

C ± の処理がきちんと出来ていないもの - 2 点

A 中身の微分を忘れた形のもの - 4 点
F 公式を $\cos$ と間違えて覚えて使っているもの - 3 点

2. 関数 $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ の 1 階、2 階微分を調べて極値を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：イ

解答例

$$g'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$g''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$$

であるので、微分が 0 となる点は $x = 0$ のみであり、この点で 2 階微分は $g''(0) = -1 < 0$ なのでこれは極大値である。

従って極値は $x = 0$ での極大値 $g(0) = 1$ のみである。

- A $g''(0) < 0$ の明示のないもの
極大・極小の判定をしていないもの - 3 点
- D 2 階微分を全くやっていないもの - 5 点

- B 微分の計算ミスがあり、それ以降が出来ていないもの 3 点
- C 微分にミスはあるが、それなりにその後もやっているもの 4 点
- E 簡単なミスなど - 3 点

増減表のミス

- A 2 階微分が 0 になる点が不足している - 4 点
- C 計算ミスなど - 5 点
- D ただし数値のミスのみなら - 3 点
- E ほとんどできていない - 8 点

グラフ関係

- B 増減表は良いがグラフが正しくないもの - 5 点
- F グラフの原点付近の様子だけ良くないもの
変曲点の付近だけがおかしいもの - 3 点

3. 次の各関数の増減・凹凸を調べて増減表とグラフの概形を描いて下さい。

(1) $h(x) = x^4 - 2x^3$

(2) $k(x) = x \log x$

配点：(1) 15 点、(2) 10 点 シラバス達成度目標：イ、ウ

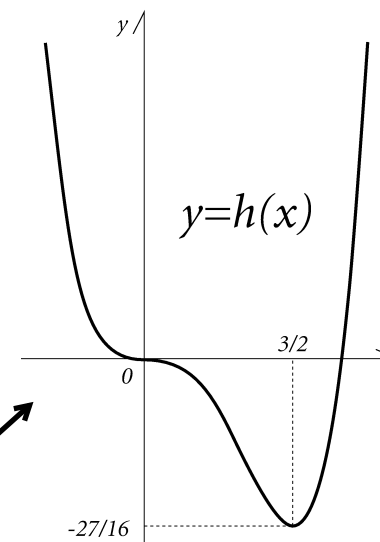
解答例 (1) まず 2 階微分まで求めておく：

$$h'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3), \quad h''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1).$$

これに基づいて増減表を書けば

x	$-\infty$	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{3}{2}$	$\dots$	∞
$h(x)$	∞	$\searrow$	0	$\swarrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{27}{16}$	$\nearrow$	∞
$h'(x)$	$-\infty$	-	0	-	-2	-	0	+	∞
$h''(x)$	∞	+	0	-	0	+	+	+	∞

であり、グラフは以下のようになります：



(2) まず 2 階微分まで求めておく：

$$k'(x) = \log x + 1, \quad k''(x) = \frac{1}{x}.$$

B 微分の大きな間違いのあるもの 3 点

微分が 0 になるのは e^{-1} のみであり、また、 $\lim_{x \rightarrow 0} k(x)$ は不定形なので $\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$ と変形して分子・分母を微分したものの比を取ると

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \rightarrow 0$$

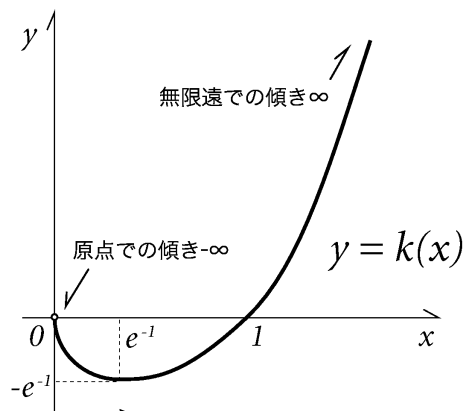
となって極限值が存在するため、ロピタルの定理により元の極限值も存在して $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 0$ である。

これらに基づいて増減表を書けば

x	0	...	e^{-1}	...	∞
$k(x)$	0	↘	$-e^{-1}$	↗	∞
$k'(x)$	$-\infty$	-	0	+	∞
$k''(x)$	∞	+	+	+	∞

A 増減表の間違い(定義域など) - 3 点
E 増減表がほとんど出ていない - 5 点
C $k''=0$ となる点は何故かある - 3 点

であり、グラフは以下のようになります：



A グラフの原点付近がおかしいもの - 3 点
D グラフ無し - 3 点

4. 次の様にパラメータ表示された曲線の $t = 2$ に対応した点における接線の方程式を求めて下さい。

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^3}{1+t^3} \end{cases}, \quad t > 0$$

配点：5 点 シラバス達成度目標：エ

解答例

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3(1+t^3) - 3t \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{9t^2(1+t^3) - 3t^3 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{9t^2}{(1+t^3)^2}$$

なので $t = 2$ に対応した点 $(\frac{6}{9}, \frac{24}{9}) = (\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$ での接線の傾きは

$$\frac{y'(2)}{x'(2)} = \frac{9 \cdot 2^2}{3 - 6 \cdot 2^3} = -\frac{4}{5}$$

となり、接線の方程式は

$$y - \frac{8}{3} = -\frac{4}{5}\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{16}{5}$$

である。

B 傾きの計算ミス - 3 点
C その他のミス - 2 点

5. 極座標で次の様に表される点を通常の xy -座標（デカルト座標）で表すとどうなりますか？

(1) $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ (2) $(3, \pi)$

逆に、デカルト座標で次の様に表される点を極座標で表すとどうなりますか？

(3) $(-2\sqrt{3}, 2)$ (4) $(1, 1)$

配点：(1)、(4) で8点、6点、(2)、(3) は各8点 シラバス達成度目標：オ

解答例 (1)

$$x = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 1, \quad y = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 1$$

より、求める座標は $(1, 1)$ である。

A 計算ミス - 3点

(4) 上の結果から明らかに $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ である。

A $(3, 0)$ としたもの 4点
B それ以外は 2点

(2) 明らかに $(-3, 0)$ である。

(3) $r = \sqrt{12 + 4} = 4$ なので、 $4 \cos \theta = -2\sqrt{3}$ となり、これは $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を意味する。

また、 $4 \sin \theta = 2$ なのでこれは $\sin \theta = \frac{1}{2}$ を意味する。

これらを満たす角度は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では $\frac{5\pi}{6}$ である。従ってこの点を極座標で表すと $(r, \theta) = (4, \frac{5\pi}{6})$ である。

A 角度の惜しいミス ($\pi/6$ など) 4点

6. 必要ならばロピタルの定理を使って次の極限値が存在するかどうか判定して下さい。また、極限値が存在するならばその値も求めて下さい。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{1 - x}$$

配点：10点 シラバス達成度目標：カ

解答例 この極限値は不定形であるので、分子・分母の微分の比を見ると

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'} = \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -\frac{1}{x} \rightarrow -1$$

なので極限値が存在している。従ってロピタルの定理により、元の極限値も存在して -1 である。

A ロピタルの定理の使い方が適切でないもの - 3点
B 計算ミス - 2点
C 考え方のミス - 3点