１．$\mathrm{Tan}^{-1}(2x^2-1)$ の導関数を求めて下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：ア

解答例

$$\left\{\mathrm{Tan}^{-1}(2x^2-1)\right\}' = \frac{1}{1+(2x^2-1)^2}4x = \frac{2x}{2x^4-2x^2+1}$$

２．必要ならばロピタルの定理を使って次の極限値が存在するかどうか判定して下さい。また、極限値が存在するならばその値も求めて下さい。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{\mathrm{e}^{2x-1}}$$

配点：１５点	シラバス達成度目標：カ

解答例　これは $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので、分母・分子の微分の比を見ると

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'} = \frac{3}{2\mathrm{e}^{2x-1}} \to 0 \quad \mathrm{as}\, x\to\infty$$

となって収束しています。従ってロピタルの定理からもとの極限値も存在して同じ 0 です。

３．　関数 $h(x) = -x^4 + 4x^3 + 3$ の増減・凹凸を調べて増減表とグラフの概形を描いて下さい。

配点：２０点	シラバス達成度目標：ウ

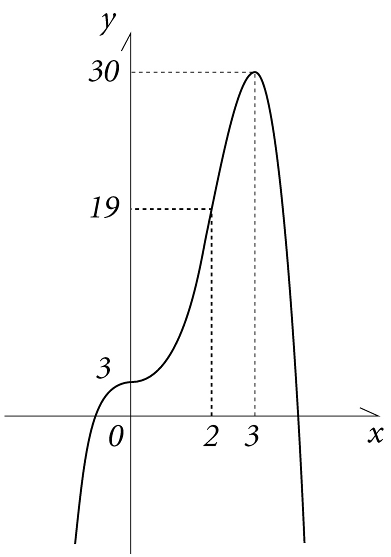
解答例

$$h'(x) = -4x^3 + 12x^2 = 4x^2(3-x), \quad h''(x) = -12x^2 + 24x = 12x(2-x)$$

なので、増減表は

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	∞
$h(x)$	$-\infty$	↗	3	↗	19	↗	30	↘	$-\infty$
$h'(x)$	∞	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$h''(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-\infty$

となり、グラフの概形は以下の通りです：



４．　次の様にパラメータ表示された曲線の $t = \frac{\pi}{3}$ に対応した点における接線の方程式を求めて下さい。

$$\begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{3}\cos t \\ y = -1 + 2\sin t \end{cases} .$$

配点：１５点	シラバス達成度目標：エ

解答例　まず $t = \frac{\pi}{3}$ に対応した点の座標を求めると、

$$x = 2 + 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3} = 2 + \sqrt{3}, \quad y = -1 + 2\sin\frac{\pi}{3} = -1 + \sqrt{3}$$

です。また、一般の点での接線の方向ヴェクターは

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3}\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

ですから、$t = \frac{\pi}{3}$ のときには接線の傾きは

$$\frac{2\cos\frac{\pi}{3}}{-2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{3}$$

となって求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y + 1 - \sqrt{3} &= -\frac{1}{3}(x - 2 - \sqrt{3}) \\ y &= -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

であることが分かります。

５．極座標で $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$ と表される点を通常の xy-座標（デカルト座標）で表すとどうなりますか？

配点：１０点	シラバス達成度目標：オ

解答例 $(\sqrt{3}, -1)$

６．次の各関数の１階、２階微分を調べて極値を求めて下さい。

（１）$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{1-x}$

（２）$g(x) = 3x^4 - 16x^3 + 21x^2 + 12x + 1$

配点：（１）１５点、（２）１０点	シラバス達成度目標：イ

解答例 （１）2 階微分まで計算すると

$$f'(x) = (2x - x^2)\mathrm{e}^{1-x}, \quad f''(x) = (2 - 4x + x^2)\mathrm{e}^{1-x}$$

ですので、微分が 0 となるのは $x = 0, 2$ のときで、更に

$$f''(0) = 2\mathrm{e} > 0, \quad f''(2) = -2\mathrm{e}^{-1} < 0$$

によれば極値は $x = 0$ での極小値 0、$x = 2$ での極大値 $\frac{4}{\mathrm{e}}$ です。

（２）2 階微分まで計算すると

$$\begin{aligned} g'(x) &= 12x^3 - 48x^2 + 42x + 12 \\ &= 6(x-2)(2x^2 - 4x - 1) \\ &= 12(x-2)\left\{(x-1)^2 - \frac{3}{2}\right\} \\ &= 12(x-2)\left(x - 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x - 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \\ g''(x) &= 36x^2 - 96x + 42 \end{aligned}$$

となっていますので、微分が 0 となるのは $x = 2, 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ のときです。

$x = 2$ のときは、$g''(2) = -6 < 0$ ですからこれは極大値です。関数の値は $g(2) = 29$ です。

$x = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ のときは、$2x^2 - 4x - 1 = 0$ となっていますから、$g''(x)$ をこれで割った余りを求めれば

$$g''(x) = 18(2x^2 - 4x - 1) - 24x + 60$$

となっていますので、

$$g''\left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -24\left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 60 = 36 \mp 24\sqrt{\frac{3}{2}} > 0$$

からこの２点では共に極小値である事が分かります。
また、元の関数をこれで割った余りを求めれば

$$g(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{5}{4}\right)(2x^2 - 4x - 1) + 12x + \frac{9}{4}$$

となっていますので、極小値の値は

$$g\left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 12\left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \frac{9}{4} = \frac{57}{4} \pm 12\sqrt{\frac{3}{2}}$$

です。