問題 **1** タンジェントの逆関数について以下の問いに答えて下さい。

(1) $\mathrm{Tan}^{-1}x$ とはどんな関数であるか、以下の文章の（ア）、（ウ）に当てはまる言葉と（イ）に当てはまる区間（$(0,1)$ や $[-\pi,\pi]$ のような記号で書く）を答えて下さい。

> $\mathrm{Tan}^{-1}x$ とは、任意の実数 x に対して $\boxed{\text{（ア）}}$ の値が x であるような角度のうち $\boxed{\text{（イ）}}$ の範囲にあるもの（これはただ 1 つである）を対応させる関数、つまり、タンジェント関数の定義域を $\boxed{\text{（イ）}}$ の範囲に制限したものの $\boxed{\text{（ウ）}}$ 関数である。

(2) タンジェントの加法公式：

$$\tan(v+w) = \frac{\tan v + \tan w}{1 - \tan v \tan w}$$

を使って次の θ について $\tan\theta$ の値を調べ、θ の値（弧度）を求めて下さい。

$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3}$$

(3) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x$ の導関数を求めて下さい。

配点：(1) 各 5 点、(2)5 点、(3)5 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　(1) （ア）タンジェント、（イ）$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$、（ウ）逆。

(2) $\tan \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$ ですから、$0 < \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$ であり、全く同様に $0 < \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$ です。従って $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であることが分かります。

また、

$$\tan\theta = \frac{\tan \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2} + \tan \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3}}{1 - \tan \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\tan \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2\cdot 3}} = 1$$

ですから $\theta = \frac{\pi}{4}$ です。

(3) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x$ のとき $\tan f(x) = x$ ですから両辺を x で微分すれば

$$\begin{aligned}
\tan f(x) &= x \\
\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} &= 1 \\
f'(x) &= \cos^2 f(x) \\
&= \frac{1}{1+\tan^2 f(x)} \\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

です。

問題 2 次の関数を微分して下さい。

(1) $f(x) = \log\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$　(2) $f(x) = (x^4 + 2x^2 + 3)^2$

(3) $f(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$

配点：各 5 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1)

$$f'(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2+1)}$$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x^4 + 2x^2 + 3)(4x^3 + 4x) \\ &= 8x(x^2+1)(x^4 + 2x^2 + 3) \\ &= 8x^7 + 24x^5 + 40x^3 + 24x \end{aligned}$$

(3)

$$f'(x) = \frac{2(1-x) - (2x+1)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

問題 3 関数 $f(x) = -x^4 - 4x^3 + 16x + 16$ の増減・凹凸を調べてグラフ $y = f(x)$ の概形を描いて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】

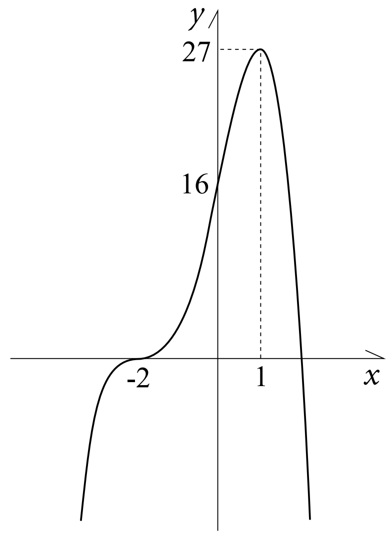
$$h'(x) = -4x^3 - 12x^2 + 16 = -4(x^3 + 3x^2 - 4) = -4(x-1)(x+2)^2$$

$$h''(x) = -12x^2 - 24x = -12x(x+2)$$

なので、増減表は

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$h'(x)$	∞	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$h''(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
$h(x)$	$-\infty$		0		16		27		$-\infty$

となり、グラフの概形は以下の通りです：



問題 4 ロピタルの定理（規則）を使って次の極限値を調べて下さい。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{x}$$

配点：10 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　分母、分子共に $x \to 0$ で 0 に収束していますから、不定形です。分母・分子の微分の比を見ると

$$\frac{(\mathrm{e}^x - \cos x)'}{x'} = \mathrm{e}^x + \sin x \to 1 \quad (x \to 0)$$

となっていますから、ロピタルの規則により

$$\frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{x} \to 1 \quad (x \to 0)$$

が分かります。

問題 5 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ は $x = 1$ で極小値 -5 をとります。このとき以下の問いに答えて下さい。

(1) a と b を求めて下さい。

(2) 関数 $f(x)$ の極大値を求めて下さい。

配点：(1)7 点、(2)3 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　(1) まず $f(1) = -5$ であることから

$$\begin{aligned} 1 + a + b &= -5 \\ a + b &= -6 \end{aligned}$$

が分かります。

またこの関数は微分可能なので極値をとる点では微分が 0 になっていなければならず、$f'(1) = 0$ が分かりますから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b \\ 0 &= f'(1) \\ &= 3 + 2a + b \\ -3 &= 2a + b \end{aligned}$$

も得られ、この２式から $a = 3, b = -9$ が分かります。

$$f''(x) = 6x + 2a = 6x + 6$$

ですから $f''(1) > 0$ であり、確かに $f(x)$ は $x = 1$ で極小値です。

(2) このとき

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$$

であって、$f'(-3) = 0$ であり、$f''(-3) < 0$ となっており、この点は極大値です。従って求める極大値は $f(-3) = 27$ です。

問題 6 パラメータ表示された曲線：

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = \log t \end{cases}, \quad t > 0$$

の、$t = 1$ に対応する点での接線の方程式を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　接線の方向ヴェクターは（$t \neq 0$ の点では）

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

ですから、$t = 1$ のときの接線の方向ヴェクターは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ になっています。

また、$t = 1$ に対応した点は点 $(2, 0)$ ですから、求める接線の方程式は

$$y = \frac{1}{2}(x - 2), \quad \text{すなわち、} \quad x - 2y - 2 = 0$$

です。

問題 7 (1) 直交座標において次の座標で表される点の極座標を求めて下さい。

(a) $(1, 1)$　　(b) $(-3\sqrt{3}, 3)$

(2) 極座標において次の座標で表される点の直交座標を求めて下さい。

(c) $(2, \pi)_{pol}$　　(d) $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)_{pol}$

配点：各 5 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】　(1) (a) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)_{pol}$.　　(b) $\left(6, \frac{5\pi}{6}\right)_{pol}$.

(2) (c) $(-2, 0)$.　　(d) $(2, 2\sqrt{3})$.