

1 (1) $\text{Tan}^{-1}x$ とは何か、定義を述べてください。

(2) $f(x) = \text{Tan}^{-1}x$ のとき、 $\tan f(x) = x$ であることを利用して $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ であることを示してください。

配点：各 5 点 シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1) $\tan x$ の定義域を $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ に制限したものの逆関数。

(2)

$$\begin{aligned}\tan f(x) &= x \\ \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x) &= 1 \\ f'(x) &= \cos^2 f(x) \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 f(x)} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}\end{aligned}$$

□

2 次の関数を微分して下さい。

$$(1) f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \quad (2) f(x) = \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$(3) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \quad (4) f(x) = x^x$$

配点：(1)10 点、(2)～(3) 各 5 点 シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1)

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3) = 12x(x-1)(x-3)$$

(2)

$$\begin{aligned}f(x) &= \log |1+x| - \log |1-x| \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{2}{1-x^2}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(2x+1)(x^2-x+1) - (x^2+x+1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} \\ &= \frac{2x(-2x) + (2x^2+2)}{(x^2-x+1)^2} \\ &= \frac{2-2x^2}{(x^2-x+1)^2}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}f(x) &= x^x \\ &= e^{x \log x} \\ f'(x) &= e^{x \log x} (\log x + 1) \\ &= x^x (\log x + 1)\end{aligned}$$

3 関数 $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 5$ の増減を調べてグラフ $y = f(x)$ の概形を描いて下さい。

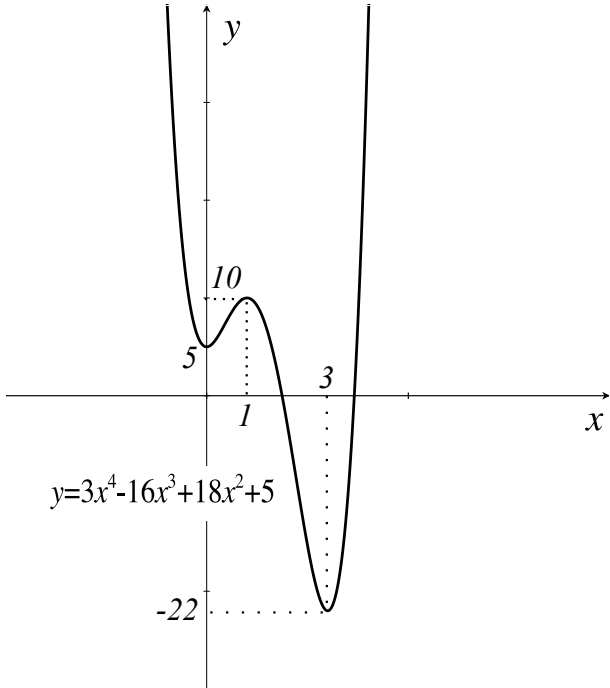
配点：15 点

シラバス到達目標：イ

【解答例】

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x - 1)(x - 3)$$
$$f(0) = 5, \quad f(1) = 10, \quad f(3) = -22$$
$$f(x) = x^4 \left(3 - \frac{16}{x} + \frac{18}{x^2} + \frac{5}{x^4} \right) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	10	$\searrow$	-22	$\nearrow$	$+\infty$



□

4 ロピタルの定理（規則）を使って次の極限值を調べて下さい。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$$

配点：10 点

シラバス到達目標：ア

【解答例】 $x \rightarrow 0$ のとき分子・分母共に 0 に収束していますからこれは不定形です。
更に

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

によれば、ロピタルの規則から求める極限值は存在して 1 です。 □

5 (1) 関数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ が $x=3$ において極値 $-\frac{1}{2}$ をとるように定数 a, b を求めて下さい。

(2) 上の (1) の極値 $-\frac{1}{2}$ が極大なのか極小なのか判定して下さい。

配点：(1)10 点、(2)5 点	シラバス到達目標：イ
-------------------	------------

【解答例】 (1) まず関数を微分すると

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - (ax+b)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$$

であり、 $f(x)$ が $x=3$ で極値をとるには $f'(3)=0$ でなければなりませんから

$$0 = -9a - 6b + a = -8a - 6b$$

が分かります。また、 $f(3) = -\frac{1}{2}$ ですから

$$-\frac{1}{2} = \frac{3a+b}{10}$$

$$-5 = 3a + b$$

$$-3a - 5 = b$$

が得られ、これを先の式に代入すれば

$$0 = -8a - 6(-3a - 5)$$

$$= 10a + 30$$

$$a = -3$$

と分かります。更に $b=4$ も分かります。

(2)

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 8x - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(6x - 8)(x^2 + 1)^2 - (3x^2 - 8x - 3)\{2x(x^2 + 1)\}}{(x^2 + 1)^4}$$

$$f''(3) = \frac{10 \cdot 10^2}{10^4} > 0$$

によれば極小値である事が分かります。

□

6 パラメータ表示された曲線：

$$\begin{cases} x = \sqrt{t+2} \\ y = t^2 - 3 \end{cases}$$

の、 $t = 2$ に対応する点での接線の方程式を求めて下さい。

配点：5 点	シラバス到達目標：ア
--------	------------

【解答例】 $t = 2$ に対応する点は $(x, y) = (2, 1)$ であり、

$$x' = \frac{1}{2\sqrt{t+2}}, \quad y' = 2t$$

から、接線の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(y-1) &= 4(x-2) \\ y &= 16x - 31 \end{aligned}$$

です。

□

7 (1) 直交座標において $(\sqrt{3}, 3,)$ で表される点の極座標を求めて下さい。

(2) 極座標において $(2, \frac{7\pi}{6})_{pol}$ で表される点の直交座標を求めて下さい。

配点：各 5 点	シラバス到達目標：ウ
----------	------------

【解答例】 (1) $(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3})_{pol}$.

(2) $(-\sqrt{3}, -1)$.

□

8 次の極方程式で表された曲線を直交座標で表すとどうなるでしょうか。 x, y の関係式を求めて下さい。

$$r = 2 \cos \theta$$

配点：10 点	シラバス到達目標：ウ
---------	------------

【解答例】

$$r = 2 \cos \theta$$

$$r^2 = 2r \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$