1 次の関数の導関数を答えてください。計算・根拠等は不要です。
(1) $\mathrm{Tan}^{-1}x$ (2) $\mathrm{Cos}^{-1}x$

配点：(1)5 点、(2)5 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1) $\dfrac{1}{1+x^2}$.

(2) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. □

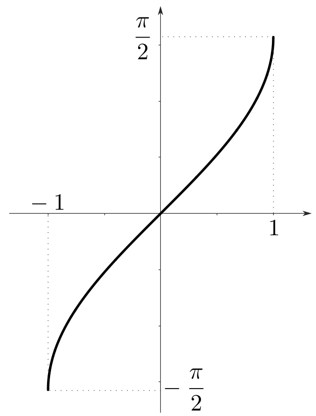
2 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ について以下の問いに答えてください、
(1) 定義を書いてください。
(2) $y=\mathrm{Sin}^{-1}x$ のグラフの概形を描いてください。

配点：(1)7 点、(2)3 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1) $-1 \leq x \leq 1$ の範囲の x に対して、$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲の角 θ のうち、$\sin\theta = x$ を満たすものを対応させる関数。

あるいは、$\sin x$ の定義域を $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に制限したものの逆関数。

(2) 逆関数のグラフは、元の関数のグラフを直線 $y=x$ について対称に変換したものなので、グラフは以下の通りです。



□

3 $\frac{0}{0}$ の不定型に関するロピタルの定理（ド・ロピタルの規則）とはどのような定理であるか、以下の（ア）、（イ）に当てはまる数式等を答えてください。

ロピタルの定理（de l'Hopital's rule）

前提条件：(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

(ii) $f(x)$、$g(x)$ は微分可能であって $g'(x) \neq 0$

(iii) （ア） が存在する

主張内容：（イ） が存在して、その値は （ア） に等しい

配点：各 5 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　（ア）：$\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$、　（イ）：$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. □

4 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在する場合はその値を求めてください。

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - 1}{x^2}$$

配点：10 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】

$$\frac{\cos 3x - 1}{x^2} = -\frac{2\sin^2 \frac{3}{2}x}{\left(\frac{3}{2}x\right)^2}\cdot\frac{9}{4} = -\frac{9}{2}\left(\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}\right)^2$$

ですが、ここで、

$$\frac{(\sin z)'}{z'} = \frac{\cos z}{1} \to 1 \quad (z \to 0)$$

に注意すれば、ロピタルの規則により $z \to 0$ のとき $\frac{\sin z}{z} \to 1$ ですから、

$$\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x} \to 1 \quad (x \to 0)$$

が分かります。従って問題の極限値は存在して $-\frac{9}{2}$ です。

あるいは、

$$\frac{\cos 3x - 1}{x^2} = -\frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)} = -9\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\frac{1}{1+\cos 3x}$$

ですが、ここで、

$$\frac{(\sin z)'}{z'} = \frac{\cos z}{1} \to 1 \quad (z \to 0)$$

に注意すれば、ロピタルの規則により $z \to 0$ のとき $\frac{\sin z}{z} \to 1$ ですから、

$$\frac{\sin 3x}{3x} \to 1 \quad (x \to 0)$$

が分かります。また $\cos 3x \to 1$ ですから、問題の極限値は存在して $-\frac{9}{2}$ です。

□

5 関数 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ の導関数の符号を調べ、$f(x)$ の増減表を書いてください。ただし、$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ は必要ですが、$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)$ は不要です。また凹凸も調べる必要はありません。

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x-2)(x+1)$$

ですから、$f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, 2, -1$ のみです。

また、$\pm\infty$ での極限値は

$$f(x) = x^4\left(3 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{5}{x^4}\right) \to +\infty$$

ですから、増減表は以下の通りです：

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	/
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

□

6 関数 $g(x) = (1 - \sqrt{x})^2$ の極値を求めて下さい。ただし極値をとる x の値、$g(x)$ の値、極大・極小の区別を明記してください。

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　微分の計算をすれば

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(1-\sqrt{x})\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \\ g''(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

であり、$g'(x) = 0$ となる点は $x = 1$ のみです。

また、この点で 2 階微分は正ですから、これは極小値である事が分かります。

あるいは、$g(x) \geq 0$ であって、$g(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみなので、極小値であるとしても良いし、増減表を書いても良い。

$g(x)$ は $0 \leq x$ で定義され、$0 < x$ で微分可能ですから、極値は $x = 1$ での極小値 $g(1) = 0$ のみです。 □

7 次の様にパラメータ表示された曲線 C の $t=2$ に対応した点における接線の方程式を求めて下さい。

$$C\ :\begin{cases} x(t)=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t)=\dfrac{3t^3}{1+t^3} \end{cases},\qquad (t>0)$$

配点：10 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{3(1+t^3)-3t3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{9t^2(1+t^3)-3t^3 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{9t^2}{(1+t^3)^2}$$

なので $t=2$ に対応した点 $(\frac{6}{9},\frac{24}{9})=(\frac{2}{3},\frac{8}{3})$ での接線の傾きは

$$\frac{y'(2)}{x'(2)}=\frac{9\cdot 2^2}{3-6\cdot 2^3}=-\frac{4}{5}$$

となり、

接線の方程式は

$$y-\frac{8}{3}=-\frac{4}{5}\left(x-\frac{2}{3}\right)$$
$$y=-\frac{4}{5}x+\frac{16}{5}$$

です。

□

8 (1) 直交座標で $\left(-3,3\sqrt{3}\right)$ と表される点の極座標を求めてください。
(2) 極座標で $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)_{pol}$ と表される点の直交座標を求めてください。

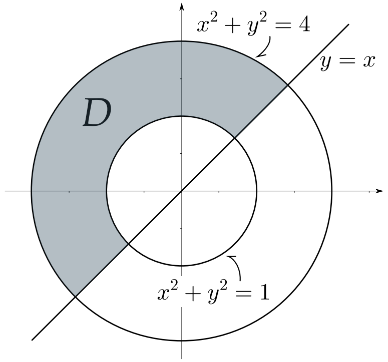
配点：(1)5 点、(2)5 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1) $\left(6,\frac{2\pi}{3}\right)_{pol}$.

(2) $(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

□

9 図の領域 D を極座標による不等式で表現してください。ただし領域は境界も含むものとします。



配点：10 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

あるいは

$$\begin{cases} 1 \leq r^2 \leq 4 \\ \cos\theta \leq \sin\theta \end{cases}$$

なども良い。 □

10 極方程式 $r = \dfrac{2}{2-\cos\theta}$ で表される曲線の、直交座標による方程式を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$r = \frac{2}{2-\cos\theta}$$

$$r(2-\cos\theta) = 2$$

$$2\sqrt{x^2+y^2} - x = 2$$

$$4\left(x^2+y^2\right) = (x+2)^2$$

$$3x^2 - 4x + 4y^2 = 4$$

$$3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 4y^2 = \frac{16}{3}$$

□