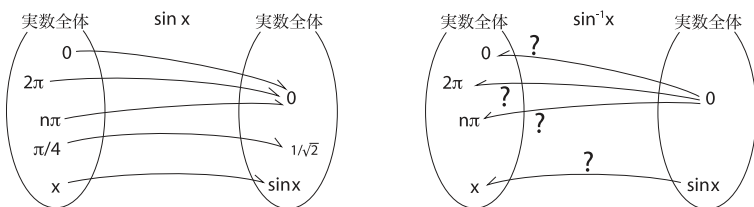


1 逆三角関数の導関数

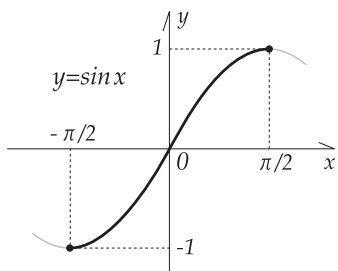
目標
C1. 逆三角関数の定義を理解し、説明できる
B1. 逆三角関数の導関数を導き出せる 演習問題 1.1
B2. 逆三角関数に関連した関数の微分計算ができる 演習問題 1.2
A1. 逆三角関数をより深く理解する 演習問題 1.3、1.4、1.5、1.6

1.1 逆三角関数

$\sin x$ は周期 2π の周期関数ですから、例えば $\sin 0 = \sin 2\pi = 0$ と云う風に異なる 2 つの値 $0, 2\pi$ に対して同じ値 0 が対応していてこれは 1 対 1 の対応ではありません。



従って、対応を逆転させたもの（＝逆関数）を考えようにも複数ある中からどれを選んでも良いのか見当もつかず、普通の意味では $\sin x$ は逆関数を持ちません。



この様に 1 対 1 でない関数の逆関数を定義するにはちょっとした細工が必要です。

どう細工するかと云うと、 $\sin x$ は、例えば $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲内では、実は 1 対 1 の対応なんです（左図）。

そこで、あらかじめ $\sin x$ の定義域をこの範囲に制限したものを考えて、これを新しい関数だと思えば逆関数を考える事が出来るわけです。

そのようにして得られる $\sin x$ の逆関数の事を、 $\text{Sin}^{-1}x$ と書きます。普通は、 $\sin x$ の単純な逆関数ではなく、 $\sin x$ の定義域を $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に制限してから（この操作を、

主値をとる、と言ったりします）逆関数をとったのだと言う事をはっきりさせるために頭文字の s を大文字にします（しない流儀もあります）。

この関数の事を arcsine（アークサイン）と呼んで $\arcsin x$ と書く場合もあります。この時も、主値をとっている事を明確にしたい場合は $\text{Arcsin} x$ と書きます。

同様に他の三角関数、 $\cos x, \tan x$ についてもやはり定義域を適当に制限したうえで逆関数を定義します：

	記法	定義
$\cos x$ の逆関数	$\text{Cos}^{-1}x$	$\cos x$ の定義域を $0 \leq x \leq \pi$ に制限したものの逆関数
$\sin x$ の逆関数	$\text{Sin}^{-1}x$	$\sin x$ の定義域を $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に制限したものの逆関数
$\tan x$ の逆関数	$\text{Tan}^{-1}x$	$\tan x$ の定義域を $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ に制限したものの逆関数

$\sin x$ の逆関数を考える時に、今回は主値と呼ばれる範囲を使いましたが、1 対 1 対応が得られるのなら別の範囲、例えば、 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ だって構わないはずです。

ではその選択はどうやって判断すれば良いのか？ と云う問題が浮上して来ますが、これはなかなか一筋縄では行きません。大抵は、どの範囲に制限しても結果には影響はないんですが、たまに、どの範囲を使うかによって答えが違って来てしまったりするので注意が必要です。

問題 1.1.1 $\text{Cos}^{-1}x$ の導関数を求めて下さい。

【解答例】 $f(x) = \text{Cos}^{-1}x$ と置くと、 $\cos f(x) = x$ ですからこの両辺を x で微分すれば

$$\{-\sin f(x)\} f'(x) = 1$$

$$= -\frac{1}{\sin f(x)}$$

となります。ここで、

$$\sin^2 f(x) + \cos^2 f(x) = 1$$

によれば

$$\sin^2 f(x) = 1 - \cos^2 f(x) = 1 - x^2$$

であり、また、 $f(x) = \text{Cos}^{-1}x$ は $\cos x$ の定義域を $0 \leq x \leq \pi$ に制限したものの逆関数なので $0 \leq f(x) \leq \pi$ であり、この範囲内においては $\sin f(x) \geq 0$ です。

$$\sin f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

となり、結局

$$(\text{Cos}^{-1}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

である事が分かります。

□

1.2 Exercise

演習問題 1.1 $\text{Sin}^{-1}x$, $\text{Tan}^{-1}x$ の導関数を求めて下さい。

$\text{Sin}^{-1}x = y$ とおけば、 $\sin$ の逆関数の定義により $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ であり、また、

$$\begin{aligned}\sin y &= x \\ (\cos y)y' &= 1 \\ y' &= \frac{1}{\cos y}\end{aligned}$$

となりますが、 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲では $\cos y \geq 0$ なので

$$\begin{aligned}\cos^2 y &= 1 - \sin^2 y \\ &= 1 - x^2 \\ \cos y &= \sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

です。従って

$$(\text{Sin}^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

となります。

$f(x) = \text{Tan}^{-1}x$ と置けば、 $\tan f(x) = x$ なので、両辺を x で微分して、

$$\frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x) = 1, \quad \text{すなわち} \quad f'(x) = \cos^2 f(x)$$

となりますが、

$$\begin{aligned}1 + \tan^2 t &= \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \\ \cos^2 t &= \frac{1}{1 + \tan^2 t}\end{aligned}$$

に注意すれば、

$$\frac{d\text{Tan}^{-1}x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

である事が分かります。

□

演習問題 1.2 次の各関数の導関数を求めて下さい。

$$(1) (1+x^2)\text{Tan}^{-1}x \quad (2) \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \text{Sin}^{-1}x) \quad (3) \text{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}$$

$$(1) g'(x) = 2x\text{Tan}^{-1}x + 1.$$

(2)

$$(x\sqrt{1-x^2})' = \sqrt{1-x^2} + x \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

なので

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \sqrt{1-x^2}$$

となります。

(3)

$$\begin{aligned}(\text{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2})' &= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

□

演習問題 1.3 (1) $k(x) = \cos^{-1}x + \sin^{-1}x$ とした時、 $k(x)$ の微分を計算して下さい。

(2) (1) の結果は何を意味しますか？

(1) 先の演習問題の結果から、 $k'(x) = 0$ です。

(2) (1) の結果から、 $-1 \leq x \leq 1$ における連続関数 $k(x)$ は定数関数である事が分かります。 $x = 0$ のとき、 $k(0) = \frac{\pi}{2}$ なので、全ての $-1 \leq x \leq 1$ に対して $k(x) = \frac{\pi}{2}$ です。□

演習問題 1.4 (1) $h(x) = \tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{1}{x}$ とした時、 $h(x)$ の微分を計算して下さい。

(2) 上の (1) の結果を見て $h(x)$ について何か考える事はありますか？

(1)

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

(2) 微分して 0 になると言う事は、これは定数関数であると云う事です。では一体如何なる定数なのか気がなりますが、任意の直角 3 角形において、直角でない 2 角を α, β とすれば明らかに $\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}$ が成り立っています。従って ($\tan \alpha = x$ とすれば良い)

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

であると思われます。□

しかし、現実はその甘くはありません。なぜならこの関数 $h(x)$ は定数関数ではないからです。実際、

$$h(1) = \tan^{-1}1 + \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$h(-1) = \tan^{-1}(-1) + \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

のように 2 点で異なる値をとっています。

どう云うことかと言うと、よく見ると $h(x)$ は $x = 0$ では定義されておらず、 $h(x)$ の定義域は 2 つの区間を合わせた $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ です。微分が 0 ですから、 $h(x)$ はこの 2 つの区間のそれぞれの中では定数関数になっていますが、2 つの区間で異なる定数関数になっているわけです。

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (x < 0) \\ \frac{\pi}{2} & (0 < x) \end{cases}$$

演習問題 1.5 (1) $\tan^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right\}$ の導関数が $\frac{2}{4x^2 + (x-1)^2}$ となる事を示して下さい。

(2) 上の (1) の結果を使って次の積分を求めて下さい：

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} dx.$$

(3) 上の (2) の結果を見て何か考える事はありますか？

【解答例】(1) 実際に微分すれば、

$$\left(\tan^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right\}\right)' = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x^2 + \frac{1}{2}(x-1)^2} = \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2}$$

となります。

(2)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} dx &= \tan^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1}\right)\right\} - \tan^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{-1}\right)\right\} \\ &= \tan^{-1}0 - \tan^{-1}1 \\ &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(3) 正の関数を積分しているのに結果は負となってしまいました。これはオカシイ。

しかし何がオカシイのでしょうか。

定積分を原始関数を使って計算する根拠となる事実をもう一度よく確かめておきましょう。

事実 1.2.1 $f(x)$ は $[a, b]$ において連続であって、 $F(x)$ がこの区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の原始関数 (の 1 つ) であるとき、

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

まず第一に、関数 $\tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right\}$ は形式上 $x = 0$ で定義されていません。

$\tan^{-1}$ は通常の主値の範囲で考えているものとして極限値を計算してみると

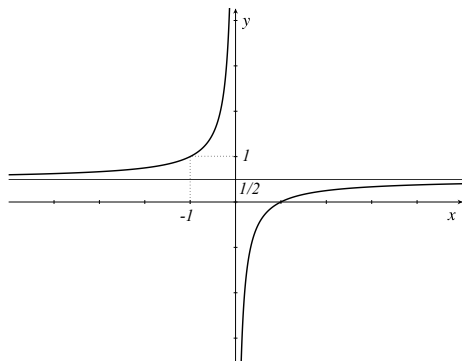
$$\lim_{x \downarrow 0} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right\} = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

である一方、

$$\lim_{x \uparrow 0} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right\} = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

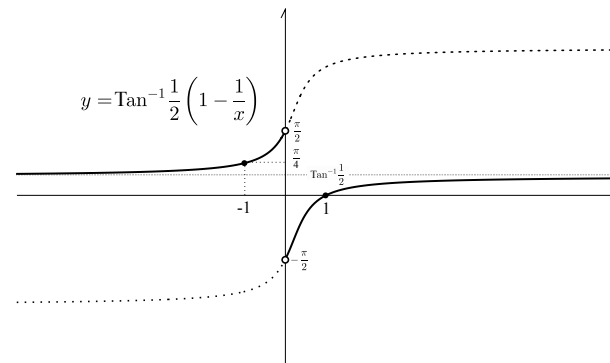
ですから、この関数は $x = 0$ の値をどのように定義したとしても連続関数にすらなりません。

$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)$ の増減表を書けば



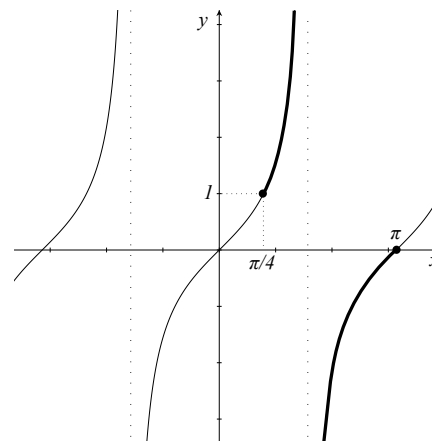
x	-1	$\dots$	-0	$+0$	$\dots$	1
$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0

ですから、いわゆる主値をとった『普通の』 $\tan^{-1}$ と合成すると

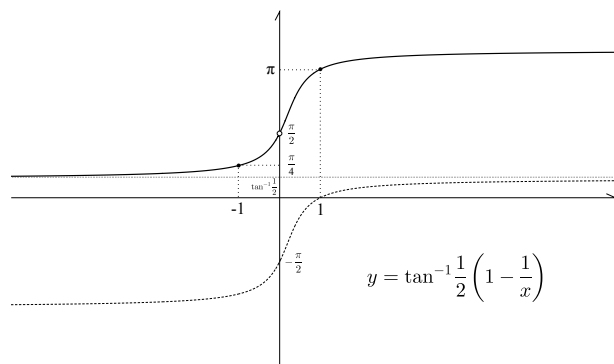


と云う風になってしまいます。これでは『 $\tan^{-1} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)$ は区間 $(-1, 1)$ における $\frac{2}{4x^2 + (x-1)^2}$ の原始関数である』とは言えません。

そこで $\tan$ の逆関数を考えるときに、通常の主値をとる (つまり $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に制限する) のではなく、例えば $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ に制限したものの逆関数を考えることにして (下図の通り、いわゆる単調増加ではないが 1 対 1 ではある)



関数 $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ と合成すれば



となりますから、 $x = 0$ のときに $y = \frac{\pi}{2}$ と定義し直せば、つまり、

$$f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \right\} & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \end{cases}$$

と定めれば（ただし、 $\tan^{-1}$ は、 $\tan$ の定義域を $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ に制限したものの逆関数とします）、 $f(x)$ は $[-1, 1]$ で連続かつ微分可能な $\frac{2}{4x^2 + (x-1)^2}$ の原始関数の一つです。この関数を使えば、

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} dx = [f(x)]_{-1}^1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

となります。

あるいは、積分範囲を分けて計算してみると広義積分になっていて

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} dx &= \int_{-1}^0 \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} dx + \int_0^1 \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} dx \\ &= \lim_{x \uparrow 0} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \right\} - \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{-1}\right) \right\} \\ &\quad + \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1}\right) \right\} - \lim_{x \downarrow 0} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

となってちゃんと正の値が出て来ます。

□

演習問題 1.6 $\sin x$ の定義域を $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ に制限したものの逆関数を $f(x)$ とするとき、 $f(x)$ の導関数を求めてください。

$$\sin f(x) = x$$

$$\cos f(x) \cdot f'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos f(x)}$$

ですが、 $\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{3\pi}{2}$ のとき $\cos f(x) \leq 0$ なので

$$\cos f(x) = -\sqrt{1 - \sin^2 f(x)} = -\sqrt{1 - x^2}$$

であって

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

です。

□